

МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ
ЗАВЕДЕНИЙ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

№ 12

1969

ИЗДАНИЕ МВТУ им. Н. Э. БАУМАНА

620.173.22

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В НАРАЩЕННЫХ НА СТЕРЖНИ И ПЛАСТИНКИ ПОКРЫТИЯХ МЕТОДОМ ЗАМЕРА ДЕФОРМАЦИИ

Канд. техн. наук Я. П. КЫО

(Статья представлена

профессором Тартуского государственного университета, д. ф.-м. н. Ю. Р. Лепиком)

В статье излагается метод определения остаточных напряжений в наращенных на одну сторону прямоугольных стержней и пластинок покрытиях, основанный на измерении деформации проволоочными датчиками в процессе постепенного наращивания или снятия покрытия. Для повышения надежности метода предлагаются данные измерения деформации описать логарифмической функцией. Приводится пример определения остаточных напряжений в гальваническом железном покрытии.

Остаточные напряжения в покрытиях, наращенных на одну грань стержня прямоугольного сечения, могут быть определены методом замера деформации проволоочными датчиками в процессе постепенного снятия покрытия [1]. Ниже излагается аналогичный, но более общий метод, в котором деформацию можно измерять в процессе наращивания или снятия покрытия. Метод пригоден как для покрытия на одной грани стержня прямоугольного сечения, так и для покрытия на одной стороне пластинки произвольной формы. Предполагается, что в процессе наращивания или снятия покрытия стержень или пластин-

ка деформируется свободно. Модули упругости и коэффициенты Пуассона основного материала и покрытия принимаются одинаковыми.

Положим сначала, что покрытие наращивается на одну грань стержня прямоугольного сечения. В этом случае можно, за исключением концевых областей, остаточное напряженное состояние предполагать одноосным и постоянным по длине стержня.

Определим остаточное напряжение $\sigma(a)$, действующее в покрытии на расстоянии a от границы с основным материалом после наращивания покрытия от толщины a до окончательной толщины t . Для этого выделим из покрытия слой толщиной $t-a$ (рис. 1). Действие выделенного слоя на оставшуюся часть покрытия заменим приложенным к плоскостям AB и CD остаточными напряжениями $\sigma(y)$ (y — расстояние от границы с основным материалом), которые предполагаем растягивающими. В результате деформация $\epsilon(a)$, измеряемая на свободной грани стержня, получает приращение $\epsilon^*(a) = \epsilon(t) - \epsilon(a)$.

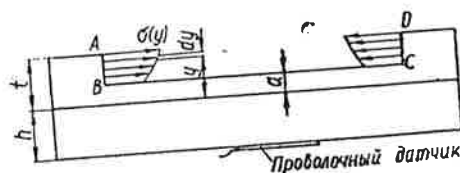


Рис. 1

На основании закона Гука и формул для нормальных напряжений в поперечном сечении стержня при растяжении—сжатии и изгибе можно записать интегральное уравнение относительно искомого напряжения $\sigma(a)$

$$6 \int_a^t \sigma(y) \left(\frac{h-2a}{3} + y \right) dy = E(h+a)^2 \epsilon^*(a), \quad (1)$$

где h — толщина стержня; E — модуль упругости.

При наращивании покрытия на пластинку образуется очевидно двухосное остаточное напряженное состояние. Предполагаем, что, за исключением небольшой области у контура пластинки, главные напряжения равны и меняются только по толщине покрытия. Тогда уравнение (1) остается в силе и для пластинки, если только модуль упругости E заменить величиной $E/(1-\mu)$, где μ — коэффициент Пуассона. Поэтому в дальнейшем ради общности всюду применяется обозначение

$$E' = \begin{cases} E & \text{— для стержня,} \\ E/(1-\mu) & \text{— для пластинки.} \end{cases}$$

Заметим, что уравнение (1) справедливо и в том случае, если для определения остаточного напряжения $\sigma(a)$ слой покрытия толщиной $t-a$ постепенно снимается. В этом нетрудно убедиться, если вспомнить известный принцип приложения обратных остаточных напряжений [1] и учесть, что в случае снятия покрытия приращение деформации определяется разностью $\epsilon(a) - \epsilon(t)$.

Таким образом, интегральное уравнение (1) допускает общий подход к различным вариантам метода замера деформации. Решение этого уравнения Вольтерра первого рода можно найти путем приведения к линейному дифференциальному уравнению первого порядка.

Дифференцируя уравнение (1) по a , получаем выражение

$$2 \int_a^t \sigma(y) dy + (h+a)\sigma(a) = -E' \left[(h+a)\epsilon^*(a) + \frac{(h+a)^2}{2} \frac{d\epsilon^*(a)}{da} \right], \quad (2)$$

откуда при $t=a$ находим напряжение

$$\sigma_0(a) = -E' \frac{h+a}{2} \frac{d\epsilon^*(a)}{da}, \quad (3)$$

которое действует в слое a в тот момент наращивания или снятия покрытия, когда этот слой является поверхностным.

Продифференцировав по a выражение (2), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{da} \left[\frac{\sigma(a)}{h+a} \right] = -E' \left[\frac{\epsilon^*(a)}{(h+a)^2} + \frac{2}{h+a} \frac{d\epsilon^*(a)}{da} + \frac{1}{2} \frac{d^2\epsilon^*(a)}{da^2} \right],$$

откуда после интегрирования и подчинения результата условию $\sigma(t) = \sigma_0(t)$ для остаточного напряжения получаем формулу

$$\sigma(a) = -E' \left[\frac{h+a}{2} \frac{d\epsilon^*(a)}{da} + 2\epsilon^*(a) - 3(h+a) \int_a^t \frac{\epsilon^*(y)}{(h+y)^2} dy \right]. \quad (4)$$

Отметим, что при $E'=E$ и $\epsilon(t)=0$ из выражения (4) вытекает формула, которая по существу совпадает с известной формулой метода замера деформации в процессе снятия слоев стержня [1]. Производную в выражениях (3) и (4) можно найти методами численного дифференцирования, основанными на интерполяционных формулах. Следует, однако, обращать внимание на то, что при этих методах случайные ошибки в отдельных значениях функции $\epsilon^*(a)$ сильно сказываются на величине производной. Поэтому представляется более надежным описание результатов измерения аналитической формулой, параметры которой определяют из условия наилучшего приближения.

Чтобы получить выражение для описания данных измерения деформации, предполагаем, что напряжение в поверхностном слое в процессе наращивания или снятия покрытия изменяется по дробно-линейному закону

$$\sigma_0(a) = \sigma_0(0) \frac{h+a}{h+ca}, \quad (5)$$

где $\sigma_0(0)$ — напряжение в поверхностном слое при $a=0$;
 c — безразмерный параметр.

Приравнявая выражения (3) и (5), получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\epsilon^*(a)}{da} = -\frac{2}{E'} \frac{\sigma_0(0)}{h+ca},$$

откуда с учетом условия $\epsilon^*(t)=0$ находим

$$\epsilon^*(a) = 2 \frac{\sigma_0(0)}{c E'} \ln \frac{h+ct}{h+ca}. \quad (6)$$

Принимая во внимание, что $\epsilon(a) = \epsilon^*(0) - \epsilon^*(a)$, получаем для описания данных измерения деформации выражение

$$\epsilon(a) = 2 \frac{\sigma_0(0)}{c E'} \ln \frac{h+ca}{h}. \quad (7)$$

Подстановка выражения (6) в равенство (4) дает для остаточных напряжений формулу

$$\sigma(a) = \sigma_0(0) \left[\frac{h+a}{h+ca} + \frac{2}{c} \ln \frac{h+ct}{h+ca} - \frac{6}{h} \frac{h+a}{c-1} \ln \frac{(h+ct)(h+a)}{(h+ca)(h+t)} \right]. \quad (8)$$

Параметры c и $\sigma_0(0)$ могут быть определены следующим образом. Разложим выражение (7) в ряд и ограничимся двумя первыми членами разложения. Применяя затем метод средних [2], находим грубые значения параметров

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c} &= 2h \frac{\sum_{i=1}^m \epsilon_i \sum_{i=m+1}^n a_i - \sum_{i=m+1}^n \epsilon_i \sum_{i=1}^m a_i}{\sum_{i=1}^m \epsilon_i \sum_{i=m+1}^n a_i^2 - \sum_{i=m+1}^n \epsilon_i \sum_{i=1}^m a_i^2}, \\ \tilde{\sigma}_0(0) &= \frac{E' h^2 \sum_{i=1}^n \epsilon_i}{2h \sum_{i=1}^n a_i - c \sum_{i=1}^n a_i^2}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где a_i, ϵ_i ($i=1, 2, \dots, n$) — опытные значения толщины покрытия и деформации; число $m=n/2$, если n четно, и $m=(n\pm 1)/2$, если n нечетно.

Далее отыскиваются поправки к грубым значениям параметров (9). Для этого составляют систему условных уравнений [2] и решают ее методом средних или методом наименьших квадратов. Принимая результаты первого уточнения за новое начальное приближение, можно в случае необходимости найти еще более точные значения параметров.

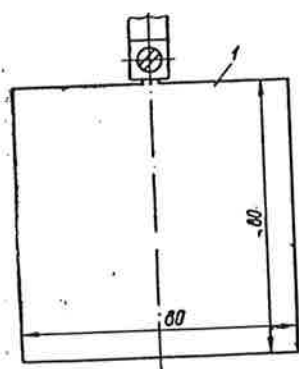


Рис. 2

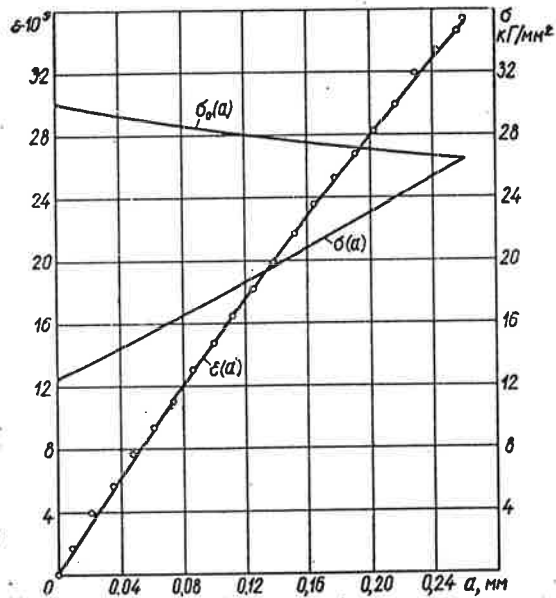
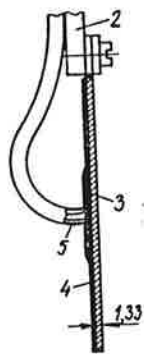


Рис. 3

Приведем пример определения остаточных напряжений в гальваническом железном покрытии, наращенном на пластинчатый катод. Конструкция катода показана на рис. 2, где обозначено: 1 — катод; 2 — подвеска; 3 — проволочный датчик; 4 — резиновая изоляция; 5 — резиновая трубка для выводов.

Результаты измерения деформации в процессе наращивания покрытия представлены на рис. 3 кружками. Характеристики катода и покрытия: $h=1,33$ мм, $t=0,26$ мм, $E=2 \cdot 10^4$ кг/мм², $\mu=0,3$.

Параметры c и $\sigma_0(0)$ определяли описанным выше способом, причем систему условных уравнений решали методом наименьших квадратов. Результаты первого уточнения оказались следующими: $c=1,82$, $\sigma_0(0)=30,0$ кг/мм².

На рис. 3 даны результаты вычисления напряжения в поверхностном слое $\sigma_0(a)$, деформации $\varepsilon(a)$ и остаточного напряжения $\sigma(a)$ по формулам (5), (7) и (8). Как видно, логарифмическая зависимость (7) достаточно хорошо описывает данные измерения деформации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Биргер И. А., Остаточные напряжения, Машгиз, М., 1963.
2. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З., Численные методы анализа, «Наука», М., 1967.

Статья поступила 25 июля 1968 г.