

МИНИСТЕРСТВО  
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

---

ИЗВЕСТИЯ  
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ  
ЗАВЕДЕНИЙ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

№ 1

1976

---

ИЗДАНИЕ МВТУ им. Н. Э. БАУМАНА

539.319 : 53.082.1

## К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОКРЫТИЯХ

Канд. техн. наук, доц. Я. П. КЫО

(Статья представлена профессором Тартуского государственного университета,  
д. ф.-м. н. Ю. Р. Лепиком)

*Излагается метод определения остаточных напряжений в наращенных на одну сторону прямоугольного стержня или пластинки покрытиях. Постоянные упругости материалов подложки и покрытия предполагаются неодинаковыми. Для повышения надежности метода данные измерения деформации аппроксимируют аналитической формулой. Приводится численный пример.*

В работе [1] был изложен метод замера деформации для определения остаточных напряжений в наращенных на стержни или пластинки покрытиях. Ниже этот способ обобщается для случая, когда модули упругости и коэффициенты Пуассона материалов подложки и покрытия различны.

Рассмотрим подложку (стержень прямоугольного сечения или пластинку произвольной формы) толщиной  $h$ , на одну сторону которой наращивается покрытие толщиной  $t$ . Пусть  $E_1$  и  $\mu_1$  — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона для подложки,  $E_2$  и  $\mu_2$  — для покрытия. Введем следующие безразмерные обозначения:

$$\zeta = \frac{y}{h}, \quad \eta = \frac{a}{h}, \quad \delta = \frac{t}{h}, \quad \nu = \frac{E_2'}{E_1'}$$

где  $y$  — расстояние от границы с подложкой;  $a$  — текущая толщина покрытия;

$$E_i' = \begin{cases} E_i & \text{для стержня} \\ \frac{E_i}{1 - \mu_i} & \text{для пластинки} \end{cases} \quad (i = 1, 2).$$

На основании расчетной схемы, принятой в [1], используя закон Гука и общеизвестные допущения технической теории упругих изотропных стержней и пластинок, рассматривая отдельно чистый изгиб и сжатие подложки [2], приходим к следующему интегральному уравнению для определения остаточного напряжения  $\sigma(\eta)$  по приращению деформации  $\epsilon^*(\eta) = \epsilon(\delta) - \epsilon(\eta)$ , замеряемой на свободной поверхности подложки:

$$2 \int_{\eta}^{\delta} \left[ \frac{v(\eta)}{\chi(\eta)} + 3\zeta \right] \sigma(\zeta) d\zeta = E_1' \frac{\varphi(\eta)}{\chi(\eta)} \epsilon^*(\eta), \quad (1)$$

где 
$$v(\eta) = 1 - 3\nu\eta^2 - 2\nu\eta^3, \quad \chi(\eta) = 1 + 2\nu\eta + \nu\eta^2,$$

$$\varphi(\eta) = 1 + 4\nu\eta + 6\nu\eta^2 + 4\nu\eta^3 + \nu^2\eta^4.$$

Как и в случае одинаковых постоянных упругости подложки и покрытия [1], можно убедиться, что уравнение (1) справедливо также и тогда, когда для определения остаточных напряжений покрытие постепенно снимается. При этом приращение деформации  $\epsilon^*(\eta) = -\epsilon(\eta)$ , если  $\epsilon(\delta) = 0$ . Таким образом, уравнение (1) допускает общий подход к различным вариантам метода замера деформации.

Интегральное уравнение (1) представляет собой уравнение Вольтерра первого рода, которое можно решить аналитически или численно. Для аналитического решения продифференцируем обе части уравнения (1) дважды по  $\eta$ . В результате приходим к дифференциальному уравнению первого порядка, откуда находим

$$\sigma(\eta) = -E_1' \left[ \frac{\varphi(\eta)}{2\psi(\eta)} \frac{d\epsilon^*(\eta)}{d\eta} + 2\nu \frac{\omega(\eta)}{\psi(\eta)} \epsilon^*(\eta) - \right. \\ \left. - 3\nu(1 + \eta) \int_{\eta}^{\delta} \frac{\varphi(\zeta)}{\psi^2(\zeta)} \epsilon^*(\zeta) d\zeta \right], \quad (2)$$

где 
$$\psi(\eta) = 1 + 3\eta + 3\nu\eta^2 + \nu\eta^3, \quad \omega(\eta) = 1 + 3\eta + 3\eta^2 + \nu\eta^3.$$

Первый член в формуле (2) выражает напряжение в поверхностном слое покрытия

$$\sigma_0(\eta) = -\frac{E_1'}{2} \frac{\varphi(\eta)}{\psi(\eta)} \frac{d\epsilon^*(\eta)}{d\eta}, \quad (3)$$

второй и третий — дополнительное напряжение, возникающее в слое  $\eta$  при увеличении относительной толщины покрытия от  $\eta$  до  $\delta$ .

Численное решение уравнения (1) осуществляем с помощью метода конечных сумм [3]. Используя при этом одну из квадратурных формул Ньютона — Котеса, получим вместо уравнения (1) систему

$$2 \sum_{j=1}^n A_j \left[ \frac{v(\eta_j)}{\chi(\eta_j)} + 3\eta_j \right] \sigma(\eta_j) = E_1' \frac{\varphi(\eta_i)}{\chi(\eta_i)} \epsilon^*(\eta_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n), \quad (4)$$

где  $A_j$  — коэффициенты квадратурной формулы. Из системы (4) последовательно определяем значения  $\sigma(\eta_j)$  во всех узлах квадратурной формулы, кроме  $j=n$  ( $\eta=\delta$ ), где напряжение находят по формуле (3).

При вычислениях по формулам (2) — (4) следует учесть, что значения функции  $\varepsilon(\eta)$  являются приближенными и содержат ошибки. Поэтому непосредственное применение способов численного анализа, основанных на интерполяционных формулах, не приводит к удовлетворительным результатам. Особенно сильно случайные ошибки в отдельных значениях функции  $\varepsilon(\eta)$  сказываются при вычислении производных, а также при решении системы (4). Для получения надежных значений остаточных напряжений можно при вычислении функции  $\varepsilon(\eta)$  и ее производной прибегнуть к сглаживанию опытных значений при помощи метода наименьших квадратов [4]. Еще более надежные результаты получаются при аппроксимации эмпирической функции  $\varepsilon(\eta)$  аналитической формулой, параметры которой определяются так, чтобы наилучшим в том или ином смысле образом аппроксимировать экспериментальные значения деформации.

Одну аппроксимирующую функцию можно построить на основании предположения о дробно-линейном изменении напряжения в поверхностном слое при наращивании покрытия

$$\sigma_0(\eta) = \sigma_0(0) \frac{1 + \nu\eta}{1 + c\nu\eta}, \quad (5)$$

где  $\sigma_0(0)$  — напряжение в поверхностном слое при  $\eta=0$ ;  $c$  — безразмерный параметр.

Зависимость (5) наблюдается при наращивании гальванических покрытий [1, 5]. Однако можно предполагать, что она применима и для некоторых других покрытий.

Приравняв выражения (3) и (5), получим дифференциальное уравнение, откуда находим аппроксимирующую функцию

$$\varepsilon(\eta) = 2 \frac{\sigma_0(0)}{E_1'} \int_0^\eta \frac{\psi(\zeta)}{\varphi(\zeta)} \frac{1 + \nu\zeta}{1 + c\nu\zeta} d\zeta. \quad (6)$$

Параметры  $\sigma_0(0)$  и  $c$  могут быть вычислены общим методом определения параметров эмпирических формул [3]. При этом, если  $c\nu\delta < 1$ , можно для вычисления грубых значений параметров воспользоваться формулами

$$\tilde{\sigma}_0(0) = \frac{\left. \begin{aligned} & \sum_{i=m+1}^n \varepsilon_i \left[ 2 \sum_{i=1}^m \eta_i + 3(1-\nu) \sum_{i=1}^m \eta_i^2 \right] - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \left[ 2 \sum_{i=m+1}^n \eta_i + 3(1-\nu) \sum_{i=m+1}^n \eta_i^2 \right] \\ & \nu \left( \sum_{i=m+1}^n \varepsilon_i \sum_{i=1}^m \eta_i^2 - \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \sum_{i=m+1}^n \eta_i^2 \right) \\ & E_1' \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \end{aligned} \right\} (7)}{2 \sum_{i=1}^n \eta_i + [3(1-\nu) - c\nu] \sum_{i=1}^n \eta_i^2}$$

где  $\eta_i, \varepsilon_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) — опытные значения безразмерной толщины покрытия и деформации; число  $m=n/2$ , если  $n$  четно, и  $m=(n\pm 1)/2$ , если  $n$  нечетно.

Формулы (7) получены методом средних на основании приближенного выражения деформации, которое получается из зависимости (6), если пользоваться двумя первыми членами разложения подынтегральной функции в ряд Тейлора.

Исключая при помощи выражения (6) из формулы (2) приращение деформации  $\varepsilon^*(\eta)$ , найдем

$$\sigma(\eta) = \sigma_0(0) \left[ \frac{1 + \nu\eta}{1 + c\nu\eta} - 4\nu \frac{\omega(\eta)}{\psi(\eta)} \int_{\eta}^{\delta} \frac{\psi(\zeta)}{\varphi(\zeta)} \frac{1 + \nu\zeta}{1 + c\nu\zeta} d\zeta + \right. \\ \left. + 6\nu(1 + \eta) \int_{\eta}^{\delta} \frac{\varphi(\zeta)}{\psi^2(\zeta)} \int_{\zeta}^{\delta} \frac{\psi(\xi)}{\varphi(\xi)} \frac{1 + \nu\xi}{1 + c\nu\xi} d\xi d\zeta \right]. \quad (8)$$

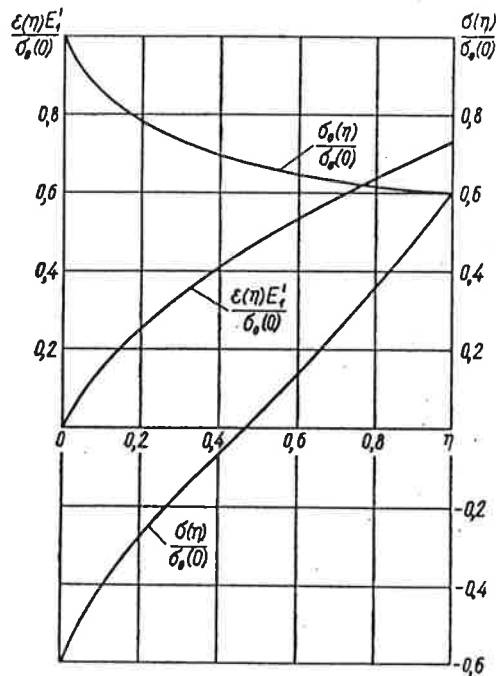


Рис. 1

В качестве примера на рис. 1 приведены результаты расчетов по формулам (5), (6) и (8) при  $\nu=c=2$  и  $\delta=1$ , использовалась для вычислений ЭВМ «Минск-22».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кыо Я. П., Определение остаточных напряжений в наращенных на стержни и пластинки покрытиях методом замера деформации, «Известия вузов. Машиностроение», 1969, № 12.
2. Лобкова Н. А., Ильин Л. А., К теории тонких неоднородных пластин, «Прикладная механика», 1965, вып. 8.
3. Демидович Б. П. и др., Численные методы анализа, изд-во «Наука», М., 1967.
4. Ланцош К., Практические методы прикладного анализа, Физматгиз, М., 1961.
5. Кыо Я. П., Исследование собственных напряжений в железных гальванических покрытиях методом деформации тонкостенного трубчатого катода, Сб. научных трудов Эстонской сельскохозяйственной академии, № 61, 1969.

Статья поступила 25 июля 1973 г.