

**СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
ЭСТОНСКОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОКРЫТИЙ  
ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН**

**114**

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОКРЫТИЯХ ЦИЛИНДРОВ\*

Я. П. К ю о

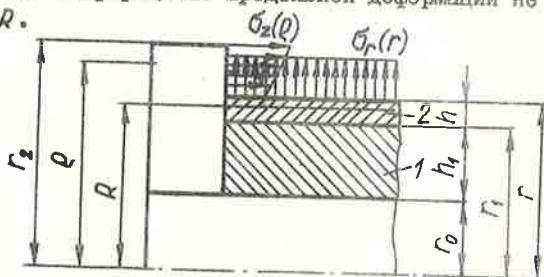
Кафедра строительной механики

Рассматривается вывод формул для расчета остаточных напряжений в наружном покрытии длинного полого цилиндра по окружной и осевой деформациям, замеренным на внутренней поверхности при наращивании или удалении материала покрытия тонкими цилиндрическими слоями. Предполагается, что в процессе наращивания или удаления материала цилиндр с покрытием деформируется свободно. Остаточное напряженное состояние считается осесимметричным и постоянным по длине цилиндра.

Введем следующие обозначения (см. рисунок):  $r_0$  - внутренний радиус цилиндра;  $r_1$  - внешний радиус цилиндра;  $r_2$  - наружный радиус покрытия;  $E_i, \mu_i$  - модуль упругости и коэффициент Пуассона цилиндра ( $i=1$ ) и покрытия ( $i=2$ ).

Определим радиальное, окружное и осевое остаточные напряжения  $\sigma_r(r)$ ,  $\sigma_\varphi(r)$  и  $\sigma_z(r)$  в портиии на расстоянии  $r$  от оси. Для этого выделим из покрытия слой толщиной  $r_2 - r$  и заменим действие удаленного слоя на оставшуюся часть напряжениями  $\bar{\sigma}_r(r)$  и  $\bar{\sigma}_z(\varrho)$  ( $\varrho$  - переменный радиус), которые предполагаем положительными (см. рисунок).

Приложение напряжений  $\bar{\sigma}_r(r)$  и  $\bar{\sigma}_z(\varrho)$  вызывает в цилиндре ( $i=1$ ) и в покрытии ( $i=2$ ) приращения напряжений  $\sigma_{ri}^*(R, r) = \sigma_{ri}(R, r_2) - \sigma_{ri}(R, r)$ ,  $\sigma_{\varphi i}^*(R, r) = \sigma_{\varphi i}(R, r_2) - \sigma_{\varphi i}(R, r)$ ,  $\sigma_{zi}^*(R, r) = \sigma_{zi}(R, r_2) - \sigma_{zi}(R, r)$  деформаций  $\varepsilon_{ri}^*(R, r) = \varepsilon_{ri}(R, r_2) - \varepsilon_{ri}(R, r)$ ,  $\varepsilon_{\varphi i}^*(R, r) = \varepsilon_{\varphi i}(R, r_2) - \varepsilon_{\varphi i}(R, r)$ ,  $\varepsilon_z^*(r) = \varepsilon_z(r_2) - \varepsilon_z(r)$ , где согласно гипотезе плоских сечений приращение продольной деформации не зависит от радиуса  $R$ .



Расчетная схема.

\* Статья написана по материалам отчета НИР за 1965-1970 г. по теме "Определение остаточных напряжений в неоднородных стержнях, пластинках, дисках и цилиндрах" (ЭСХА, 1971).

Приращения радиального и окружного напряжений определяются известными формулами Ламе [1]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ri}^*(R, r) \\ \sigma_{\theta i}^*(R, r) \end{aligned} \right\} = \varphi_i(r) \pm \frac{\psi_i(r)}{R^2}, \quad (1)$$

где  $\varphi_i(r)$ ,  $\psi_i(r)$  - неопределенные функции.

Из уравнений закона Гука вытекают зависимости

$$\sigma_{zi}^*(r) = E_i \varepsilon_z^*(r) + \mu_i [\sigma_{ri}^*(R, r) + \sigma_{\theta i}^*(R, r)]; \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\theta i}^*(R, r) = \frac{1 - \mu_i^2}{E_i} \left[ \sigma_{\theta i}^*(R, r) - \frac{\mu_i}{1 - \mu_i} \sigma_{ri}^*(R, r) \right] - \mu_i \varepsilon_z^*(r). \quad (3)$$

В соотношении (2) учтено, что согласно формулам (1) сумма  $\sigma_{ri}^*(R, r) + \sigma_{\theta i}^*(R, r)$  не зависит от радиуса  $R$ .

Для определения функций  $\varphi_i(r)$ ,  $\psi_i(r)$  имеем условия

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ri}^*(r_0, r) = 0, \quad \sigma_{r2}^*(r, r) = \sigma_r(r), \\ \sigma_{ri}^*(r_1, r) = \sigma_{r2}^*(r_1, r) = p^*(r), \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $p^*(r)$  - приращение радиального напряжения на поверхности сопряжения цилиндра и покрытия, определяемое из условия неразрывности окружной деформации у поверхности сопряжения слоев

$$\varepsilon_{\theta 1}^*(r_1, r) = \varepsilon_{\theta 2}^*(r_1, r). \quad (5)$$

Присоединяя к формулам (1) и условиям (4) условие неразрывности окружной деформации (5) и зависимость (3), получим формулу для расчета радиальных остаточных напряжений

$$\sigma_r(r) = \frac{E_1}{4(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)} \left[ \left( A - B \frac{r_1^2}{r^2} \right) \varepsilon_{\theta}^*(r) + \left( C - D \frac{r_2^2}{r^2} \right) \varepsilon_z^*(r) \right], \quad (6)$$

где  $A, B, C, D$  - постоянные, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} A &= (1 + \mu_1)(1 - 2\mu_1 + r_0^2/r_1^2)E_2/E_1 + (1 + \mu_2)(1 - r_0^2/r_1^2), \\ B &= (1 + \mu_1)(1 - 2\mu_1 + r_0^2/r_1^2)E_2/E_1 - (1 + \mu_2)(1 - 2\mu_2)(1 - r_0^2/r_1^2), \\ C &= \mu_1 A - 2(\mu_1 - \mu_2)(1 - \mu_1^2)E_2/E_1, \\ D &= \mu_1 B - 2(\mu_1 - \mu_2)(1 - \mu_1^2)E_2/E_1; \end{aligned}$$

$\varepsilon_{\theta}^*(r)$ ,  $\varepsilon_z^*(r)$  - приращения окружной и осевой деформаций на внутренней поверхности цилиндра, причем

$$\varepsilon_{\theta}^*(r) = \varepsilon_{\theta 1}(r_0, r_2) - \varepsilon_{\theta 1}(r_0, r).$$

Окружное остаточное напряжение определим из условия равновесия

$$\sigma_{\theta}(r) = \frac{d}{dr} \left[ r \sigma_r(r) \right].$$

Подставляя сюда выражение (6), получим

$$\sigma_{\theta}(r) = \frac{E_1}{4(1-\mu_1^2)(1-\mu_2^2)} \left\{ r \left[ \left( A - B \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{d\varepsilon_{\theta}^*(r)}{dr} + \left( C - D \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{d\varepsilon_z^*(r)}{dr} \right] + \left( A + B \frac{r_1^2}{r^2} \right) \varepsilon_{\theta}^*(r) + \left( C + D \frac{r_1^2}{r^2} \right) \varepsilon_z^*(r) \right\}. \quad (7)$$

Переходим к определению осевых остаточных напряжений. Приложение осевых напряжений  $\sigma_z(\rho)$  вызывает в цилиндре с покрытием продольную силу

$$-2\pi \int_0^R \sigma_z(\rho) \rho d\rho = N(r).$$

Дифференцируя это выражение по  $r$ , находим

$$\sigma_z(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{dN(r)}{dr}. \quad (8)$$

С другой стороны можно продольную силу выразить через приращения осевых напряжений  $\sigma_{z1}^*(r)$ ,  $\sigma_{z2}^*(r)$ . Учитывая, что последние не зависят от  $R$ , получим

$$N(r) = \pi \left[ (r_1^2 - r_0^2) \sigma_{z1}^*(r) + (r^2 - r_1^2) \sigma_{z2}^*(r) \right]. \quad (9)$$

Используя выражения (1) и (2), приходим на основании зависимостей (8) и (9) к формуле для определения осевого остаточного напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_z(r) = \frac{E_1}{4(1-\mu_1^2)(1-\mu_2^2)} \left\{ r \left[ C' - D' \frac{r_1^2}{r^2} + 2(\mu_1 - \mu_2)(1-\mu_2^2) \left( 1 - \frac{r_0^2}{r_1^2} \right) \times \right. \right. \\ \left. \times \frac{r_1^2}{r^2} \frac{C'' r^2 - D'' r_1^2}{Ar^2 - Br_1^2} \right] \frac{d\varepsilon_z^*(r)}{dr} + r \left( A' - B' \frac{r_1^2}{r^2} \right) \frac{d\varepsilon_{\theta}^*(r)}{dr} + \quad (10) \\ \left. + \left[ 2C' + 4\mu_1 A (B-1)(\mu_1 - \mu_2)(1-\mu_2^2) \frac{(r_1^2 - r_0^2)r_1^2}{(Ar^2 - Br_1^2)^2} \right] \varepsilon_z^*(r) + 2A' \varepsilon_{\theta}^*(r) \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} C' &= \mu_2 C + 2(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)E_2/E_1, \\ D' &= \mu_2 D + 2(1 - \mu_1^2)(1 - \mu_2^2)[(r_0^2/r_1^2) + (E_2/E_1) - 1], \\ C'' &= C + 2(\mu_1 - \mu_2)(1 - \mu_1^2)E_2/E_1, \\ D'' &= D + 2(\mu_1 - \mu_2)(1 - \mu_1^2)E_2/E_1, \\ A' &= \mu_3 A, \end{aligned}$$

$$B' = \mu_2 B - 2(\mu_1 - \mu_2)(1 - \mu_2^2)(1 - r_0^2/r_1^2).$$

Выражения (6), (7) и (10) представляют собой основные расчетные формулы. Они действительны как при наращивании, так и при удалении материала покрытия. В последнем случае следует положить  $\varepsilon_\phi^*(r) = -\varepsilon_\phi(r)$ ,  $\varepsilon_z^*(r) = -\varepsilon_z(r)$ , где  $\varepsilon_\phi(r) \equiv \equiv \varepsilon_\phi(r_0, r)$ .

Заметим, что вывод расчетных формул для определения осевых напряжений в покрытии цилиндра при наращивании или удалении материала был рассмотрен также в работах Л. И. Дехтяря [2, 3], однако полученные результаты значительно отличаются от наших. Это расхождение объясняется тем, что в работах [2, 3] в выражении радиального перемещения не учтено влияние осевых напряжений.

В частном случае, когда постоянные упругости слоев равны ( $E_1 = E_2 = E$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ) основные формулы (6), (7) и (10) заметно упрощаются и принимают вид

$$\sigma_r(r) = \frac{E}{1 - \mu^2} \frac{r^2 - r_0^2}{2r^2} \left[ \varepsilon_\phi^*(r) + \mu \varepsilon_z^*(r) \right], \quad (6')$$

$$\begin{aligned} \sigma_\phi(r) &= \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \left\{ \frac{r^2 - r_0^2}{r} \left[ \frac{d\varepsilon_\phi^*(r)}{dr} + \mu \frac{d\varepsilon_z^*(r)}{dr} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r^2 + r_0^2}{r^2} \left[ \varepsilon_\phi^*(r) + \mu \varepsilon_z^*(r) \right] \right\}, \quad (7') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r) &= \frac{E}{1 - \mu^2} \left\{ \frac{r^2 - r_0^2}{2r} \left[ \frac{d\varepsilon_z^*(r)}{dr} + \mu \frac{d\varepsilon_\phi^*(r)}{dr} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_z^*(r) + \mu \varepsilon_\phi^*(r) \right\}. \quad (10') \end{aligned}$$

Положив в этих выражениях  $\varepsilon_{\phi}^*(r) = -\varepsilon_{\phi}(r)$  и  $\varepsilon_z^*(r) = -\varepsilon_z(r)$ , приходим к известным формулам Закса при обточке цилиндра [4].

В случае, когда остаточные напряжения определяются в покрытии тонкостенного цилиндра, полученные выше формулы являются неудобными, так как приходится иметь дело с малыми разностями близких чисел.

Радиальными остаточными напряжениями можно в тонкостенных трубах пренебречь. Преобразуем формулы окружного и осевого остаточных напряжений к виду, удобному для расчета в случае тонкостенного цилиндра. Для этого выразим радиусы  $r_0$  и  $r$  через толщину стенки цилиндра  $h_1$  и расстояние от поверхности сопряжения цилиндра и покрытия  $h$  (см. рисунок). Получим

$$r_0 = r_1 - h_1, \quad r = r_1 + h.$$

Подставляя эти значения  $r_0$  и  $r$  в формулы (7) и (10) и считая величины  $h_1/r_1$  и  $h/r_1$  пренебрежимо малыми по сравнению с единицей, приходим к следующим формулам для определения остаточных напряжений в покрытиях тонкостенных цилиндров:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\phi}(h) &= \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left[ (\vartheta h_1 + h) \frac{d\varepsilon_{\phi}^*(h)}{dh} + \right. \\ &+ \left. \mu_2 (\varkappa h_1 + h) \frac{d\varepsilon_z^*(h)}{dh} + \varepsilon_{\phi}^*(h) + \mu_2 \varepsilon_z^*(h) \right], \\ \sigma_z(h) &= \frac{E_2}{1-\mu_2^2} \left[ (\vartheta h_1 + h) \frac{d\varepsilon_z^*(h)}{dh} + \right. \\ &+ \left. \mu_2 (\varkappa h_1 + h) \frac{d\varepsilon_{\phi}^*(h)}{dh} + \varepsilon_z^*(h) + \mu_2 \varepsilon_{\phi}^*(h) \right], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$\vartheta = (1-\mu_2^2)E_1 / (1-\mu_1^2)E_2,$$

$$\varkappa = \mu_1 \vartheta / \mu_2.$$

В заключение заметим, что определению остаточных напряжений в многослойных цилиндрах разрушающим методом посвящены работы [5, 6, 7].

#### Л и т е р а т у р а

1. Работнов Ю. Н. Сопротивление материалов. М., Физматгиз, 1962, с. 321.

2. Дехтярь Л. И. Определение остаточных напряжений в биметаллических цилиндрах и дисках. - "Заводская лаборатория", 1968, № 4, с. 471...476.
3. Дехтярь Л. И. Определение остаточных напряжений в покрытиях и биметаллах. Кишинев, "Картя Молдовеняскэ", 1968, с. 139...143.
4. Биргер И. А. Остаточные напряжения. М., Машгиз, 1963, с. 159...160.
5. Иванов С. И., Глазирин В. А. Определение остаточных напряжений в многослойном цилиндре. - "Тр. Куйбышев. авиац. ин-т", 1971, вып. 53, с. 74...83.
6. Дехтярь Л. И., Никорич П. И. Определение остаточных напряжений в многослойных цилиндрических деталях и покрытиях. - В сб.: Электрохимическая обработка металлов. Кишинев, "Штиинца", 1971, с. 186...198.
7. Деев В. А. Расчет остаточных напряжений первого рода в многослойных валах и осях. - "Вестник машиностроения", 1974, № 6, с. 19...22.

DÉTERMINATION DES CONTRAINTES  
RÉSIDUELLES DANS DES REVÊTEMENTS DES CYLINDRES

Par J. K5o

Chaire de mécanique des constructions

R é s u m é

On déduit dans le travail présent les formules pour calculer des contraintes résiduelles dans des revêtements extérieurs des cylindres creux et longues d'après les déformations circonférentielles et longitudinales mesurées sur la surface intérieure du cylindre pendant l'apport ou l'enlèvement successif du revêtement par les couches cylindriques et minces.