EESTI
PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA
TEADUSLIKE TÖÖDE KOGUMIK

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ЭСТОНСКОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ
АКАДЕМИИ

EESTI NSV PÕLLUMAJANDUSE MINISTEERIUM
МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА ЭССР

EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA TEADUSLIKE TÖÖDE KOGUMIK

METSAMAJANDUSE JA HÜDROMELIORATSIOONI TEADUSKONNA TÖÖD

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ ЭСТОНСКОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ

ТРУДЫ ФАКУЛЬТЕТА ЛЕСНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГИДРОМЕЛИОРАЦИИ

11

EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA VÄLJAANNE
ИЗДАНИЕ ЭСТОНСКОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ
TARTU, 1959

ТЕРМОУПРУГИЕ НАПРЯЖЕНИЯ В МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИНКАХ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПО ТОЛЩИНЕ НАГРЕВЕ

Аспирант Я. Кыо

В работах, затрагивающих термоупругие напряжения и деформации в слоистых пластинках (Э. И. Григолюк, 1947, 1953; В. И. Королев, 1955; Э. Л. Аксельрад, 1957), рассматриваются лишь биметаллические пластинки. Между тем, в некоторых отраслях техники (приборостроение, химическое машиностроение, самолетостроение и др.) может иметь место практическое применение пластинок, составленных из трех и более слоев. Поэтому исследование различных случаев термоупругого равновесия многослойных пластинок несомненно представляет интерес.

Ниже приводятся общие уравнения и исследуются некоторые частные задачи термоупругого равновесия пластинок, составленных из любого числа слоев при переменном только по толщине нагреве (охлаждении).

1. Исходные положения

Под многослойной пластинкой будем понимать пластинку, составленную из ряда плоско-параллельных слоев, которые изготовлены из различных материалов. Материал каждого слоя считаем однородным, изотропным и подчиняющимся закону Гука.

Предполагаем, что слои прочно соединены между собой по плоскостям контакта, так что при деформировании пластинки составляющие перемещения можно считать непрерывными функциями координат.

При сделанных оговорках очевидно, что между основаниями пластинки имеется параллельная им плоскость, элементы которой не испытывают деформаций от изгиба. Эту плоскость, положение которой определяется в дальнейшем, примем за исходную и будем называть исходной плоскостью.

Поверхность, на которой оказываются лежащими точки ис-

ходной плоскости после деформации пластинки, назовем исходной поверхностью.

Тогда гипотезы Кирхгоффа для многослойной пластинки можно сформулировать следующим образом:

1. Линейные элементы, нормальные к исходной плоскости до деформации, остаются прямыми и нормальными к исходной поверхности и не изменяют своей длины.

2. Надавливанием слоев можно пренебречь.

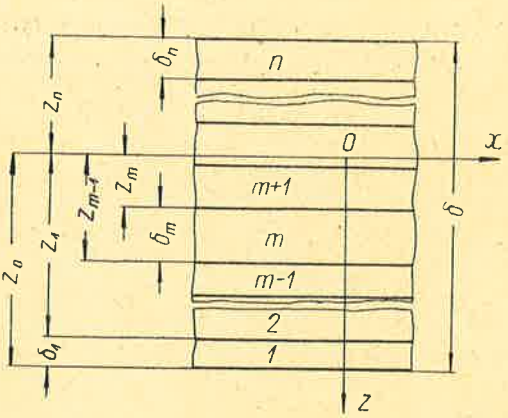

Рис. 1

Будем еще предполагать, что деформации пластинки настолько малы, что можно пользоваться линейными зависимостями между деформациями и перемещениями (уравнения Коши). Поэтому считаем, что прогибы пластинки по сравнению с толщиной малы (во всяком случае, не превышают толщины).

Координатную плоскость xOy совместим с исходной плоскостью, а ось Oz направим вниз (рис. 1).

Неизвестное пока расстояние исходной плоскости от нижнего основания пластинки обозначим через z_0.

Отсчет слоев ведем снизу вверх, обозначив общее число их через n.

Для m-го по счету слоя (рис. 1) введем следующие обозначения: δ_m — толщина; z_m — координата z верхней граничной плоскости; E_m — модуль нормальной упругости; μ_m — коэффициент Пуассона; α_m — коэффициент линейного теплового расширения; $\sigma_x^{(m)}$, $\sigma_y^{(m)}$, $\sigma_z^{(m)}$, $\tau_{xy}^{(m)}$, $\tau_{xz}^{(m)}$, $\tau_{yz}^{(m)}$, — составляющие термоупругого напряжения; $\varepsilon_x^{(m)}$, $\varepsilon_y^{(m)}$, $\varepsilon_z^{(m)}$, $\gamma_{xy}^{(m)}$, $\gamma_{xz}^{(m)}$, $\gamma_{yz}^{(m)}$ — составляющие полной деформации; u_m, v_m, w — составляющие перемещения, параллельные соответственно осям Ox, Oy и Oz.

Пусть δ полная толщина пластинки; $t = t(z)$ — температура нагрева (охлаждения) на уровне z; u_0, v_0, w — перемещения какой-либо точки исходной плоскости; ε_x^0, ε_y^0, γ_{xy}^0 — компоненты деформации исходной плоскости.

Приводим условия, которым должны удовлетворять напряжения и перемещения на основаниях пластинки и на плоскостях контакта смежных слоев.

1. На нижнем основании при $z = z_0$

$$\tau_{xz}^{(1)} = \tau_{yz}^{(1)} = 0 \tag{1}$$

2. На верхнем основании при $z = z_n$

$$\tau_{xz}^{(n)} = \tau_{yz}^{(n)} = 0 \tag{2}$$

3. На плоскостях контакта смежных слоев при $z = z_m$

$$\tau_{xz}^{(m)} = \tau_{xz}^{(m+1)}, \quad \tau_{yz}^{(m)} = \tau_{yz}^{(m+1)} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{3}$$

$$u_m = u_{m+1}, \quad v_m = v_{m+1} \quad (m = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{4}$$

2. Составляющие термоупругого напряжения

Выразим термоупругие напряжения через деформации исходной плоскости.

Согласно первой гипотезе Кирхгоффа

$$\varepsilon_z^{(m)} \approx \gamma_{xz}^{(m)} \approx \gamma_{yz}^{(m)} \approx 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

Тогда деформация в какой-либо точке m-го слоя определяется составляющими $\varepsilon_x^{(m)}$, $\varepsilon_y^{(m)}$, $\gamma_{xy}^{(m)}$, которые складываются из упругих деформаций $\varepsilon_x^{(m)'}$, $\varepsilon_y^{(m)'}$, $\gamma_{xy}^{(m)'}$, и чисто тепловых деформаций $\varepsilon_x^{(m)''} = \varepsilon_y^{(m)''} = a_m t$, $\gamma_{xy}^{(m)''} = 0$. Прибегая еще к уравнениям Коши, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x^{(m)} &= \frac{\partial u_m}{\partial x} = \varepsilon_x^{(m)'} + a_m t \\ \varepsilon_y^{(m)} &= \frac{\partial v_m}{\partial y} = \varepsilon_y^{(m)'} + a_m t \\ \gamma_{xy}^{(m)} &= \frac{\partial u_m}{\partial y} + \frac{\partial v_m}{\partial x} = \gamma_{xy}^{(m)'} \end{aligned}\right\} \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

На основании оговоренных выше гипотез, легко получить соотношения (см. А. С. Калманок, 1950, стр. 9):

$$u_m = u_0 - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v_m = v_0 - z\frac{\partial w}{\partial y} \quad (m = 1, 2, \ldots, n), \tag{7}$$

которые удовлетворяют условиям (4).

Исключая из (6) с помощью (7) перемещения u_m, v_m и подставляя найденные таким путем для $\varepsilon_x^{(m)\prime}$, $\varepsilon_y^{(m)\prime}$, $\gamma_{xy}^{(m)\prime}$ выражения в уравнения закона Гука с учетом второй гипотезы Кирхгоффа $\sigma_z^{(m)} \approx 0$, получим:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x^{(m)} &= E_m^*\left[\varepsilon_x^0 + \mu_m\varepsilon_y^0 - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_m\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - (1+\mu_m)\alpha_m t\right]\\
\sigma_y^{(m)} &= E_m^*\left[\varepsilon_y^0 + \mu_m\varepsilon_x^0 - z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu_m\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) - (1+\mu_m)\alpha_m t\right]\\
\tau_{xy}^{(m)} &= E_m^*(1-\mu_m)\left(\frac{\gamma_{xy}^0}{2} - z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Здесь

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x},\quad \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y},\quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \tag{9}$$

$$E_m^* = \frac{E_m}{1-\mu_m^2} \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что при $n = 2$ зависимости (8) совпадают с уравнениями (4.4) работы Э. И. Григолюка (Э. И. Григолюк, 1953).

Компоненты напряжения $\tau_{xz}^{(m)}$ и $\tau_{yz}^{(m)}$ определяем из первых двух уравнений равновесия теории упругости при отсутствии объемных сил. Подставим (8) в указанные уравнения, учитывая при этом, что слагаемые выражений (8), не содержащие z, удовлетворяют уравнениям равновесия плоской задачи. Интегрируя полученные таким путем дифференциальные зависимости по z, найдем:

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xz}^{(m)} &= \frac{E_m^* z^2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w + X_m(x, y)\\
\tau_{yz}^{(m)} &= \frac{E_m^* z^2}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w + \Psi_m(x, y)
\end{aligned}\right\} \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

Здесь X_m, Ψ_m — произвольные функции;

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{12}$$

Определяя произвольные функции с помощью условий (1) и (3), которые дают для разыскания $2n$ функций столько же уравнений, и подставив найденные X_m, Ψ_m в (11), получим:

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xz}^{(m)} &= -\frac{1}{2}(A_m - E_m^* z^2)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w\\
\tau_{yz}^{(m)} &= -\frac{1}{2}(A_m - E_m^* z^2)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w
\end{aligned}\right\} \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

где

$$A_m = \sum_{i=1}^{m} z_{i-1}^2 (E_i^* - E_{i-1}^*) \tag{14}$$

Полученные для $\tau_{xz}^{(m)}$ и $\tau_{yz}^{(m)}$ выражения очевидно удовлетворяют условиям (1) и (3), с помощью которых были найдены X_m, Y_m. Выполнение условия (2) на верхнем основании приводит к соотношению

$$\sum_{m=1}^{n} E_m^* (z_{m-1}^2 - z_m^2) = 0, \tag{15}$$

которое определяет положение исходной плоскости.

Из рис. 1 видим, что

$$\left.\begin{aligned} z_{m-1} &= z_0 - (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{m-1}) \\ z_m &= z_0 - (\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_m) \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Подставляя (16) в (15), найдем:*

$$z_0 = \frac{\sum_{m=1}^{n} E_m^* \delta_m [\delta_m + 2(\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_{m-1})]}{2 \sum_{m=1}^{n} E_m^* \delta_m} \tag{17}$$

В частном случае двухслойной пластинки ($n = 2$) из (17) получим:

$$z_0 = \frac{E_1^* \delta_1^2 + E_2^* \delta_2 (2\delta_1 + \delta_2)}{2(E_1^* \delta_1 + E_2^* \delta_2)} \tag{18}$$

Нетрудно получить также следующее выражение:

$$z_0 - \delta_1 = \frac{E_2^* \delta_2^2 - E_1^* \delta_1^2}{2(E_1^* \delta_1 + E_2^* \delta_2)} \tag{19}$$

В том случае, когда $E_1^* \delta_1^2 = E_2^* \delta_2^2$, из (19), следует что $z_0 = \delta_1$, т. е. исходная плоскость совпадает с плоскостью контакта.

При $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ формулы (18) и (19) совпадают соответственно с выражениями (2.6) и (2.7) работы. В. И. Королева (В. И. Королев, 1955).

---

* Такая же формула без конкретного раскрытия обозначений приводится в автореферате диссертации И. И. Еникеева (И. И. Еникеев, 1954), где рассматривается поперечный изгиб многослойных пластинок.

3. Усилия и моменты, отнесенные к единице ширины сечения пластинки

Приведем напряжения к статически эквивалентной системе упругих усилий и моментов, действующих на единицу ширины сечения пластинки. Для этих усилий и моментов введем следующие обозначения (рис. 2)*: N_x, N_y — нормальные силы; T_{xy} — сдвигающая сила; Q_x, Q_y — поперечные силы; M_x, M_y — изгибающие моменты; M_{xy} — крутящий момент.

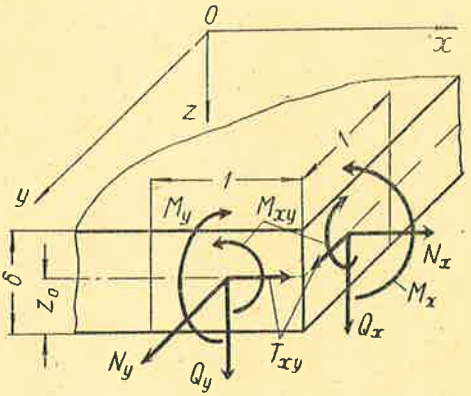

Рис. 2.

Суммируя напряжения на элементарных площадках $dF = 1 \cdot dz$ по всей толщине пластинки, имеем:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= \sum_{m=1}^{n} \int_{z_m}^{z_{m-1}} \sigma_x^{(m)} dz, \quad N_y = \sum_{m=1}^{n} \int_{z_m}^{z_{m-1}} \sigma_y^{(m)} dz, \\ T_{xy} &= \sum_{m=1}^{n} \int_{z_m}^{z_{m-1}} \tau_{xy}^{(m)} dz \\ Q_x &= \sum_{m=1}^{n} \int_{z_m}^{z_{m-1}} \tau_{xz}^{(m)} dz, \quad Q_y = \sum_{m=1}^{n} \int_{z_m}^{z_{m-1}} \tau_{yz}^{(m)} dz \\ M_x &= \sum_{m=1}^{n} \int_{z_m}^{z_{m-1}} \sigma_x^{(m)} z\, dz, \quad M_y = \sum_{m=1}^{n} \int_{z_m}^{z_{m-1}} \sigma_y^{(m)} z\, dz, \\ M_{xy} &= \sum_{m=1}^{n} \int_{z_m}^{z_{m-1}} \tau_{xy}^{(m)} z\, dz \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

* На рис. 2 показаны положительные направления усилий и моментов.

Подставив в эти формулы выражения (8), (13) и произведя интегрирование, получим:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= B'(\varepsilon_x^0 + \mu'\varepsilon_y^0) - C\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \sum_{m=1}^{n}(1+\mu_m)E_m^* a_m \int_{z_m}^{z_{m-1}} t\,dz \\ N_y &= B'(\varepsilon_y^0 + \mu'\varepsilon_x^0) - C\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sum_{m=1}^{n}(1+\mu_m)E_m^* a_m \int_{z_m}^{z_{m-1}} t\,dz \\ T_{xy} &= B'(1-\mu')\frac{\gamma_{xy}^0}{2} + C\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$$Q_x = -D'\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w, \quad Q_y = -D'\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \quad (22)$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -D'\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu''\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + C\varepsilon_y^0 - \sum_{m=1}^{n}(1+\mu_m)E_m^* a_m \int_{z_m}^{z_{m-1}} tz\,dz \\ M_y &= -D'\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu''\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + C\varepsilon_x^0 - \sum_{m=1}^{n}(1+\mu_m)E_m^* a_m \int_{z_m}^{z_{m-1}} tz\,dz \\ M_{xy} &= -D'(1-\mu'')\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - C\frac{\gamma_{xy}^0}{2} \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} \mu' &= \frac{\sum_{m=1}^{n}\mu_m E_m^*\delta_m}{\sum_{m=1}^{n}E_m^*\delta_m}, \qquad B' = \sum_{m=1}^{n}E_m^*\delta_m \\ \text{и} \quad \mu'' &= \frac{\sum_{m=1}^{n}\mu_m E_m^*(z_{m-1}^3 - z_m^3)}{\sum_{m=1}^{n}E_m^*(z_{m-1}^3 - z_m^3)}, \qquad D' = \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{n}E_m^*(z_{m-1}^3 - z_m^3) \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

обозначают соответственно: приведенный коэффициент Пуассона и приведенную жесткость многослойной пластинки при плоском напряженном состоянии и при изгибе;

$$C = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \mu_m E_m^* (z_{m-1}^2 - z_m^2) \qquad (25)$$

обозначает коэффициент жесткости.

Заметим, что в некоторых случаях выражения (21) и (23) упрощаются вследствие обращения коэффициента C в нуль. Учитывая соотношение (15), легко убедиться, что $C = 0$ в том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

1) коэффициенты Пуассона для всех слоев пластинки одинаковы или

2) имеет место геометрическая и упругая симметрия относительно срединной плоскости.

Поскольку для металлов коэффициенты Пуассона практически одинаковы, то при рассмотрении многослойных металлических пластинок можно принять, что $C \approx 0$.

4. Основные дифференциальные уравнения

Рассмотрим равновесие малого элемента с ребрами dx, dy, δ, выделенного из деформированной пластинки сечениями, параллельными координатным плоскостям xOz и yOz.

Усилия N_x, N_y и T_{xy}, действующие на боковые грани этого элемента, удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0, \qquad (26)$$

откуда следует, что они могут быть выражены через функцию φ (функция Эри) следующим образом:

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \qquad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \qquad T_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} \qquad (27)$$

При малых прогибах, как известно, разыскание функции φ сводится к интегрированию бигармонического уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \qquad (28)$$

при известных граничных условиях.

Приравняя нулю сумму проекций на ось Oz всех сил, действующих на рассматриваемый элемент (см. А. С. Калманок, 1950, стр. 16—17), получим:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2T_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = 0 \qquad (29)$$

Записывая еще раз уравнение (28) и исключая из (29) с помощью (22) и (27) усилия $Q_x, \ldots, T_{xy}$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2\nabla^2\varphi &= 0 \\ D'\nabla^2\nabla^2 w &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Итак, расчет термоупругих напряжений и деформаций в многослойных пластинках при переменном только по толщине нагреве (охлаждении) сводится к интегрированию дифференциальных уравнений (30) и удовлетворению соответствующих граничных условий для φ и ω.

Граничные условия многослойной пластинки будут очевидно такими же что и в соответствующих случаях однородной пластинки.

Если функции φ и w найдены, то из (21) определяются ε_x^0, ε_y^0, γ_{xy}^0, а затем по (8) и (13) вычисляются термоупругие напряжения.

Рассмотрим некоторые частные задачи.

5. Пластинка с жестко заделанным краем

Пусть имеется многослойная пластинка произвольной формы с жестко заделанным краем (рис. 3).

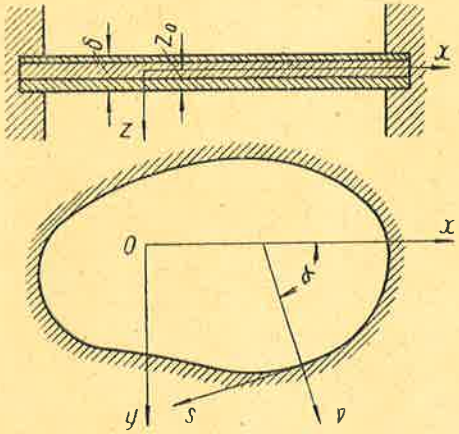

Рис. 3.

Полагая

$$w = 0, \qquad (31)$$

мы удовлетворяем тождественно второму основному дифференциальному уравнению (30) и граничным условиям

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

где $\frac{\partial}{\partial \nu}$ — производная по внешней нормали ν к контуру (рис. 3).

Вследствие жесткой заделки края должно быть $u_0 = v_0 = 0$, откуда следует, что

$$\varepsilon_x^0 = \varepsilon_y^0 = \gamma_{xy}^0 = 0 \tag{32}$$

Подставляя (31) и (32) в (21)—(23), имеем:

$$\left.\begin{aligned} N_x = N_y &= -\sum_{m=1}^{n} (1+\mu_m) E_m^* \alpha_m \int_{z_m}^{z_{m-1}} t\, dz \\ M_x = M_y &= -\sum_{m=1}^{n} (1+\mu_m) E_m^* \alpha_m \int_{z_m}^{z_{m-1}} tz\, dz \\ T_{xy} &= Q_x = Q_y = M_{xy} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Для напряжений из (8) и (13) получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{(m)} = \sigma_y^{(m)} &= \sigma^{(m)} = -\frac{E_m \alpha_m t}{1-\mu_m} \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \\ \tau_{xy}^{(m)} &= \tau_{xz}^{(m)} = \tau_{yz}^{(m)} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Нормальные напряжения претерпевают на поверхностях контакта разрыв.

Формула (34) для частного случая круглой биметаллической пластинки ($n = 2$) получена в работе Э. И. Григолюка (Э. И. Григолюк, 1953)

6. Пластинка с жестко защемленным краем

Рассмотрим многослойную пластинку произвольной формы с жестко защемленным краем (рис. 4).

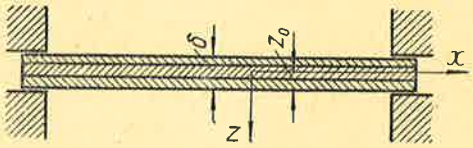

Рис. 4.

Функция w должна на контуре удовлетворять условиям

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \tag{35}$$

Для функции φ имеем на контуре условия

$$N_\nu = T_{s\nu} = 0, \tag{36}$$

где N_ν — нормальная сила на контуре пластинки, $T_{s\nu}$ — сдвигающая сила там же.

Выражая N_ν и $T_{s\nu}$ через N_x, N_y, T_{xy} (А. С. Калманок, 1950, стр. 22), а затем исключая N_x, N_y, T_{xy} с помощью (27), получим вместо (36):

$$\left.\begin{aligned} &\cos^2\alpha\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \sin^2\alpha\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \sin 2\alpha\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 0 \\ &\sin 2\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) - 2\cos 2\alpha\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где α — угол, который составляет внешняя нормаль ν с осью Ox (рис. 3).

Полагаем

$$\varphi = w = 0 \tag{38}$$

Дифференциальные уравнения (30) и граничные условия (35), (37) будут удовлетворены.

Из (27) подстановкой (38) получим:

$$N_x = N_y = T_{xy} = 0 \tag{39}$$

Согласно (39) из (21) найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x^0 = \varepsilon_y^0 = \varepsilon^0 = \frac{1}{B'(1+\mu')}\sum_{m=1}^{n}(1+\mu_m)E_m^*\alpha_m\int_{z_m}^{z_{m-1}} t\,dz \\ &\gamma_{xy}^0 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Поперечные силы и моменты определятся из (22) и (23) подстановкой в них (38), (40).

$$\left.\begin{aligned} &Q_x = Q_y = M_{xy} = 0 \\ &M_x = M_y = \frac{C}{B'(1+\mu')}\sum_{m=1}^{n}(1+\mu_m)E_m^*\alpha_m\int_{z_m}^{z_{m-1}} t\,dz - \\ &\qquad - \sum_{m=1}^{n}(1+\mu_m)E_m^*\alpha_m\int_{z_m}^{z_{m-1}} tz\,dz \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

Аналогично для термоупругих напряжений из (8) и (13) найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_x^{(m)} = \sigma_y^{(m)} = \sigma^{(m)} = \frac{E_m}{1-\mu_m}(\varepsilon^0 - \alpha_m t) \\ &\tau_{xy}^{(m)} = \tau_{xz}^{(m)} = \tau_{yz}^{(m)} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (m = 1, 2, \ldots, n) \tag{42}$$

Определим ε^0 для частного случая, когда слои пластинки подвергаются равномерному, но различному для отдельных слоев нагреву (охлаждению).

Обозначая температуру нагрева m-го слоя через t_m из (40), получим:

$$\varepsilon^0 = \frac{1}{B'(1+\mu')} \sum_{m=1}^{n} (1+\mu_m) E_m^* \delta_m \alpha_m t_m \tag{43}$$

Исследуем частный случай трехслойной пластинки (рис. 5), когда только первый слой подвергается нагреву (охлаждению), т. е. $t_1 \neq 0$, $t_2 = t_3 = 0$.

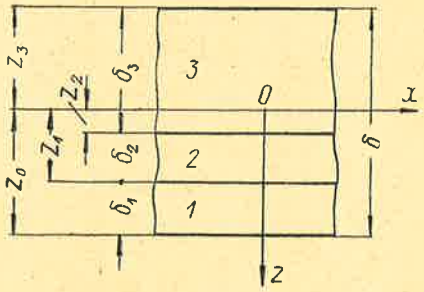

Рис. 5.

При $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ и $E_1 = E_2$ из (43) с учетом (24) найдем:

$$\varepsilon^0 = \frac{\vartheta \delta_1 \alpha_1 t_1}{\vartheta(\delta_1 + \delta_2) + \delta_3}, \tag{44}$$

где

$$\vartheta = \frac{E_1}{E_3} \tag{45}$$

Подставляя (44) в (42), имеем:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = \sigma^{(1)} &= -\frac{E_1 \alpha_1 t_1}{1-\mu} \cdot \frac{\vartheta \delta_2 + \delta_3}{\vartheta(\delta_1+\delta_2)+\delta_3} \\ \sigma_x^{(2)} = \sigma_y^{(2)} = \sigma^{(2)} &= \frac{E_1 \alpha_1 t_1}{1-\mu} \cdot \frac{\vartheta \delta_1}{\vartheta(\delta_1+\delta_2)+\delta_3} \\ \sigma_x^{(3)} = \sigma_y^{(3)} = \sigma^{(3)} &= \frac{E_1 \alpha_1 t_1}{1-\mu} \cdot \frac{\delta_1}{\vartheta(\delta_1+\delta_2)+\delta_3} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Если толщина первого слоя δ_1 весьма мала по сравнению с толщинами δ_2 и δ_3, то в (46) можно ею пренебречь. Тогда имеем:

$$\sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = \sigma_*^{(1)} \approx -\frac{E_1 \alpha_1 t_1}{1-\mu} \tag{47}$$

7. Пластинка со свободным краем

Рассмотрим многослойную пластинку произвольной формы со свободным краем, закрепленную в некоторой точке исходной плоскости. Ограничимся при этом практически важным случаем, когда можно полагать $C \approx 0$ (металлические пластинки).

Начало координат совместим с точкой закрепления пластинки.

Приведем граничные условия для функции w.

1. В точке закрепления при $x = y = 0$

$$w = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{48}$$

2. На контуре пластинки

$$M_\nu = 0, \qquad Q_\nu + \frac{\partial M_{s\nu}}{\partial s} = 0, \tag{49}$$

где M_ν, $M_{s\nu}$ — изгибающий и крутящий моменты на контуре пластинки;

Q_ν — поперечная сила там же; $\frac{\partial}{\partial s}$ — производная по дуге s контура (рис. 3).

Выражая M_ν, $M_{s\nu}$ и Q_ν через M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y (см. А. С. Калманок, 1950 стр. 22), а затем воспользовавшись уравнениями (21) — (23), мы сможем представить условия (49) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} & D'\left[\mu'' \nabla^2 w + \left(1-\mu''\right)\left(\cos^2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \right.\right.\right. \\ & \qquad \left.\left.\left. - \sin 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)\right] + L = 0 \\ & \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 w + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 w + \\ & + \left(1-\mu''\right) \frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\sin 2\alpha}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \cos 2\alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

где

$$L = \sum_{m=1}^{n} (1+\mu_m) E_m^* a_m \int_{z_m}^{z_{m-1}} tz\, dz \tag{51}$$

Для функции φ остаются очевидно действительными граничные условия (37).

Полагаем

$$\varphi = 0, \qquad w = \frac{K}{2}(x^2 + y^2), \tag{52}$$

где K — постоянный коэффициент.

Дифференциальные уравнения (30) и граничные условия (37), (48) удовлетворены. Второе условие (50) также удовлетворено.

Подставляя (52) в первое условие (50), найдем:

$$K = -\frac{L}{D'(1+\mu'')} \tag{53}$$

Дифференцируя два раза второе уравнение (52) и учитывая, что прогибы малы, имеем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = K = \frac{1}{\varrho}, \tag{54}$$

где ϱ — радиус кривизны исходной поверхности.

Итак, исходная поверхность многослойной пластинки любой формы при переменном только по толщине нагреве (охлаждении) есть сферическая поверхность * с кривизной K.

Компоненты деформации ε_x^0, ε_y^0 и γ_{xy}^0 определяются выражениями (40).

Подставляя (40) и (52) в (21)—(23), имеем:

$$N_x = N_y = T_{xy} = Q_x = Q_y = M_x = M_y = M_{xy} = 0$$

Так и должно быть, если учесть, что внешняя нагрузка на пластинку отсутствует и край ее свободен.

Учитывая (52) определим из (8) и (13) напряжения. В результате получим:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^{(m)} = \sigma_y^{(m)} = \sigma^{(m)} &= \frac{E_m}{1-\mu_m}(\varepsilon^0 - zK - \alpha_m t) \\ \tau_{xy}^{(m)} = \tau_{xz}^{(m)} = \tau_{yz}^{(m)} &= 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Пусть слои пластинки подвергаются равномерному нагреву (охлаждению) по их толщине. Тогда из (53) с учетом (51) находим:

$$K = -\frac{1}{2(1+\mu'')D'}\sum_{m=1}^{n}(1+\mu_m)(z_{m-1}^2 - z_m^2)E_m^*\alpha_m t_m, \tag{56}$$

где t_m — температура нагрева m-го слоя.

Разберем частный случай трехслойной пластинки (рис. 5), когда лишь первый слой подвергается нагреву (охлаждению), т. е. $t_1 \neq 0$, $t_2 = t_3 = 0$. Допустим при этом, что величина α_1 нам неизвестна и подлежит определению по кривизне исходной поверхности.

Полагаем, что $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu$ и $E_1 = E_2$. Тогда используя (24) и (18), из (56) получим для вычисления α_1 следующую формулу:

$$\alpha_1 t_1 = -K\frac{9^2(\delta_1+\delta_2)^4 + 2\vartheta\delta_3[2(\delta_1+\delta_2)^3 + 3\delta_3(\delta_1+\delta_2)^2 + 2\delta_3^2(\delta_1+\delta_2)] + \delta_3^4}{6\vartheta\delta_1[\vartheta\delta_2(\delta_1+\delta_2) + \delta_3(\delta_1+2\delta_2+\delta_3)]} \tag{57}$$

* Для частного случая биметаллической круглой пластинки это показано Э. И. Григолюком (Э. И. Григолюк, 1947, 1953), а для биметаллической пластинки любой формы Э. Л. Аксельрадом (Э. Л. Аксельрад, 1957).

Относительное удлинение исходной плоскости ε^0 определяется по формуле (44).

Подставляя (44) в (55), имеем:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = \sigma^{(1)} &= -\frac{E_1}{1-\mu}\left[\alpha_1 t_1 \frac{\vartheta\delta_2+\delta_3}{\vartheta(\delta_1+\delta_2)+\delta_3} + zK\right] \\
\sigma_x^{(2)} = \sigma_y^{(2)} = \sigma^{(2)} &= \frac{E_1}{1-\mu}\left[\frac{\vartheta\delta_1\alpha_1 t_1}{\vartheta(\delta_1+\delta_2)+\delta_3} - zK\right] \\
\sigma_x^{(3)} = \sigma_y^{(3)} = \sigma^{(3)} &= \frac{E_3}{1-\mu}\left[\frac{\vartheta\delta_1\alpha_1 t_1}{\vartheta(\delta_1+\delta_2)+\delta_3} - zK\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Найдем еще среднее напряжение в первом слое. Подставляя (57) в первое уравнение (58), получим зависимость, из которой при $z = z_0 - 0{,}5\delta_1$ найдем:

$$\sigma_{\text{ср}}^{(1)} = \frac{E_3 K}{1-\mu} \cdot \frac{\vartheta^2(\delta_1^3\delta_2 + \delta_2^4) + \vartheta(4\delta_2^3\delta_3 + 6\delta_2^2\delta_3^2 + 4\delta_2\delta_3^3 + \delta_1^3\delta_3) + \delta_3^4}{6\delta_1[\vartheta\delta_2(\delta_1+\delta_2)+\delta_3(\delta_1+2\delta_2+\delta_3)]} \qquad (59)$$

Если отсюда с помощью (57) исключить K, а затем в найденной зависимости пренебречь δ_1 по сравнению с δ_2 и δ_3, то получим для вычисления напряжения в тонком поверхностном слое формулу, которая совпадает с найденным выше соотношением (47).

Выведем также формулы для расчета напряжений в двухслойной пластинке в предположении, что $\vartheta = 1$, т. е. $E_1 = E_2 = E$. Для этой цели исключим из (58) с помощью (57) $\alpha_1 t_1$ и примем в полученных уравнениях $\delta_3 = 0$. В результате найдем:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x^{(1)} = \sigma_y^{(1)} = \sigma^{(1)} &= \frac{EK}{1-\mu}\left[\frac{(\delta_1+\delta_2)^2}{6\delta_1} - z\right] \\
\sigma_x^{(2)} = \sigma_y^{(2)} = \sigma^{(2)} &= -\frac{EK}{1-\mu}\left[\frac{(\delta_1+\delta_2)^2}{6\delta_2} + z\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (60)$$

Формулы (46), (47) и (57)—(60 могут быть использованы при расчете собственных напряжений в гальванических покрытиях по деформации односторонне покрытой катодной пластинки.

В заключение заметим, что поскольку формулы (42) и (55) удовлетворяют условиям на краю лишь в интегральной форме ($N_\nu = 0$, $M_\nu = 0$), то на основании принципа Сен-Венана можно считать их верными только на расстоянии большем, чем толщина пластинки от края.

ЛИТЕРАТУРА — KIRJANDUS

Григолюк Э. И. 1947. Температурные напряжения в круглой сплошной биметаллической пластинке. Труды кафедры сопротивления материалов МВТУ им. Н. Э. Баумана. разд. III.

Григолюк Э. И. 1953. Тонкие биметаллические оболочки и пластины. Инженерный сборник, т. XVII.
Королев В. И. 1955. Тонкие двухслойные пластинки и оболочки. Инженерный сборник, т. XXII.
Аксельрад Э. Л. 1957. Расчет неоднородных по термоупругим свойствам оболочек и его применение к биметаллическим элементам приборов. Труды Ленинградского института авиационного приборостроения, вып. XXIV.
Калманок А. С. 1950. Строительная механика пластинок. Машстройиздат, М.
Еникеев И. И. 1954. Некоторые задачи изгиба упругих неоднородных плит несимметричного строения по толщине. Автореферат канд. дисс., Казань.

TERMOELASTSED PINGED PALJUKIHILISTES PLAATIDES PAKSUSE SUUNAS MUUTUVAL SOOJENDAMISEL

Aspirant J. Kõo

Kokkuvõte

Artiklis vaadeldakse paksuse suunas ebaühtlaselt soojendatavate (jahutatavate) paljukihiliste isotroopsete plaatide (joon. 1) termoelastset tasakaalu. Kirchhoffi tuntud hüpoteese aluseks võttes näidatakse, et plaadi paksusega võrreldes väikeste läbipaindumiste juures taandub ülesande lahendamine diferentsiaalvõrrandite (30) integreerimisele ja funktsioonide φ ning w vastavate ääretingimuste rahuldamisele. Võrrandites (30) tähistab φ pingefunktsiooni, w läbipaindefunktsiooni ja D' paljukihilise plaadi redutseeritud jäikust paindel.

Üksikjuhtudest vaadeldakse meelevaldse kontuuriga plaati alljärgnevate ääre kinnitusviiside juures: 1) liikumatult kinnitatud äär (joon. 3); 2) plaadi tasapinnas liikuvalt kinnitatud äär (joon. 4); 3) vaba äär. Näidatakse, et esimesel ja teisel ääre kinnitamise juhul $w=0$, kolmandal juhul aga $w=0{,}5K(x^2+y^2)$. Niisiis paindub vaba äärega plaat mööda sfäärilist pinda (K tähistab toodud võrrandis konstanti).

THERMOELASTISCHE SPANNUNGEN IN VIELSCHICHTIGEN PLATTEN BEI VERÄNDERLICHER ERWÄRMUNG IN RICHTUNG DER DICKE

J. Kõo

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird das thermoelastische Gleichgewicht vielschichtiger isotropischer Platten (Abb. 1) bei der in Richtung der Dicke veränderlicher Erwärmung (Abkühlung) behandelt. Auf der Grundlage der Hypothesen von Kirchhoff wird gezeigt, dass bei geringen Durchbiegungen die Lösung der Aufgabe zur Integrierung der Differentialgleichungen (30) und zur Erfüllung der entsprechenden Randbedingungen für die Funktionen φ und w führt. In den Gleichungen (30) ist mit φ die Spannungsfunktion, mit w die Durchbiegungsfunktion und mit D' der reduzierte Biegesteifigkeitsmodul einer vielschichtigen Platte bezeichnet.