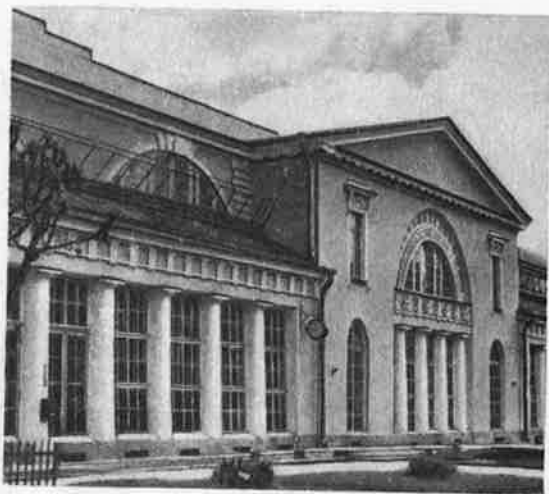


В **Р**
МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РСФСР
375-89 ПИСКИ
ЛЕНИНГРАДСКОГО СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ИНСТИТУТА

Том 89

МЕХАНИЗАЦИЯ И ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА



СЕЛЬХОЗИЗДАТ
1962

Я. П. КЮ,
инженер

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ГАЛЬВАНИЧЕСКИ НАРАЩЕННЫХ СФЕРАХ

Физико-химические процессы [1], протекающие в гальванически осажденном металле, вызывают объемную деформацию, которую будем называть собственной объемной деформацией осадка.

Собственная объемная деформация осадка не может происходить свободно, и поэтому в гальванически наращенных телах возникают собственные напряжения.

Аналогия между собственной объемной деформацией осадка и температурной объемной деформацией позволяет при решении задачи об определении собственных напряжений в гальванически наращенных телах пользоваться решением соответствующей задачи термоупругости [2, 3].

Рассмотрим сначала решение полярно-симметричной задачи термоупругости для многослойной сферы, которое в дальнейшем используем при решении задачи о собственных напряжениях в гальванически наращенной сфере.

Полярно-симметричная задача термоупругости для многослойной сферы. Рассмотрим полую сферу, спаянную из n концентрических изотропных слоев, находящуюся под действием полярно-симметричного поля температур t и равномерных внутреннего p_0^* и внешнего p_n^* давлений (рис. 1).

Для i -ого слоя введем обозначения:

r_{i-1}, r_i — внутренний и наружный радиусы слоя;

$\varepsilon^{(i)}$ — линейная деформация;

$\gamma^{(i)}$ — сдвиг;

$u^{(i)}$ — перемещение;

$\sigma^{(i)}$ — нормальное напряжение;

$\tau^{(i)}$ — касательное напряжение;

E_i — модуль упругости;

μ_i — коэффициент Пуассона;

α_i — коэффициент линейного теплового расширения.

Введем сферическую систему координат $r\theta\varphi$, начало которой совпадает с центром сферы. Вследствие полярной симметрии сдвиги $\gamma_{r\theta}^{(i)}$, $\gamma_{\theta\varphi}^{(i)}$, $\gamma_{\varphi r}^{(i)}$, касательные напряжения $\tau_{r\theta}^{(i)}$, $\tau_{\theta\varphi}^{(i)}$, $\tau_{\varphi r}^{(i)}$ и перемещения $u_\theta^{(i)}$, $u_\varphi^{(i)}$ равны нулю, а $\varepsilon_\theta^{(i)} = \varepsilon_\varphi^{(i)}$, $\sigma_\theta^{(i)} = \sigma_\varphi^{(i)}$, причем деформации

$$\varepsilon_r^{(i)} = \frac{du_r^{(i)}}{dr}, \quad \varepsilon_\theta^{(i)} = \frac{u_r^{(i)}}{r}, \quad (1)$$

и напряжения $\sigma_r^{(i)}$, $\sigma_\theta^{(i)}$ являются функциями только от r .

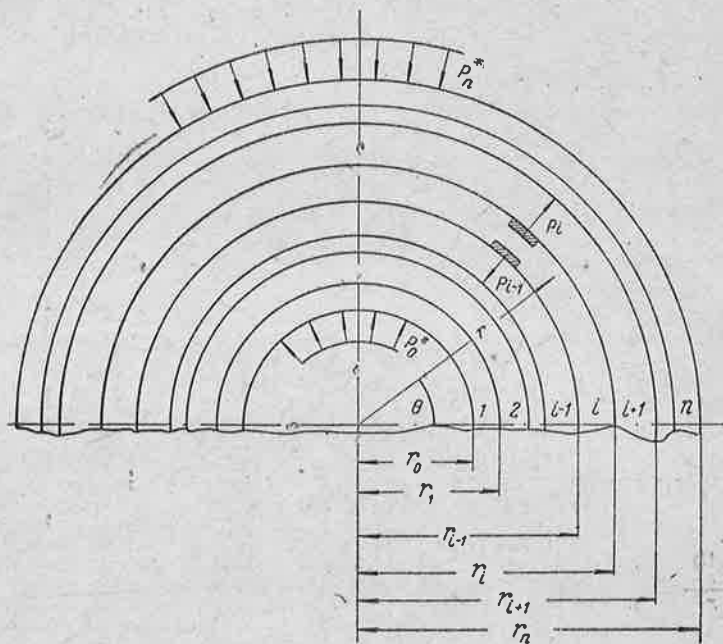


Рис. 1.

Некоторый слой i составной сферы можно рассматривать как однородную полую сферу, находящуюся под действием то-лярно-симметричного поля температур и равномерных внутреннего p_{i-1} и внешнего p_i радиальных усилий. Напряжения и перемещения в такой сфере определяются по следующим формулам [4]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(i)} &= -\frac{2E_i}{1-\mu_i} T_i + \frac{E_i C_i}{1-2\mu_i} - \frac{2E_i}{1+\mu_i} \cdot \frac{C_2}{r^3}, \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{E_i}{1-\mu_i} (T_i - \alpha_i t) + \frac{E_i C_i}{1-2\mu_i} + \frac{E_i}{1+\mu_i} \cdot \frac{C_2}{r^3}; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{u_r}{r} = \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} T_i + C_1 + \frac{C_2}{r^3}, \quad (3)$$

где

$$T_i = \frac{1}{r^3} \int_{r_{i-1}}^r \alpha_i t r^2 dr \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Определяя постоянные интегрирования C_1 и C_2 из условий

$$[\sigma_r^{(i)}]_{r=r_{i-1}} = p_{i-1}, \quad [\varepsilon_r^{(i)}]_{r=r_i} = p_i,$$

вместо (2) и (3) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(i)} &= \frac{2E_i}{1 - \nu_i} \left[\frac{r^3 - r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \cdot \frac{r_i^3}{r^3} (T_i)_{r=r_i} - T_i \right] + \\ &+ \frac{r_i^3 p_i - r_{i-1}^3 p_{i-1}}{r_i^3 - r_{i-1}^3} - \frac{r_i^3 r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \cdot \frac{p_i - p_{i-1}}{r^3}, \\ \sigma_\theta^{(i)} &= \frac{E_i}{1 - \nu_i} \left[\frac{2r^3 + r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \cdot \frac{r_i^3}{r^3} (T_i)_{r=r_i} + T_i - \alpha_i t \right] + \\ &+ \frac{r_i^3 p_i - r_{i-1}^3 p_{i-1}}{r_i^3 - r_{i-1}^3} + \frac{r_i^3 r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \cdot \frac{p_i - p_{i-1}}{2r^3}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_r^{(i)}}{r} &= \frac{1 + \nu_i}{1 - \nu_i} \left\{ \frac{2r_i^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \left[\frac{1 - 2\nu_i}{1 + \nu_i} + \frac{r_{i-1}^3}{2r^3} \right] (T_i)_{r=r_i} + T_i \right\} + \\ &+ \frac{1 - 2\nu_i}{E_i} \cdot \frac{r_i^3 p_i - r_{i-1}^3 p_{i-1}}{r_i^3 - r_{i-1}^3} + \frac{1 + \nu_i}{2E_i} \cdot \frac{r_i^3 r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} \times \\ &\times \frac{p_i - p_{i-1}}{r^3}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n); \quad p_0 = -p_0^*, \quad p_n = -p_n^*.$$

Неизвестные усилия p_i определим из условий неразрывности радиальных перемещений на поверхностях сопряжения слоев

$$[u_r^{(i)}]_{r=r_i} = [u_r^{(i+1)}]_{r=r_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (7)$$

Используя уравнение (6), получим вместо (7):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1-\mu_i}{2E_i} \cdot \frac{r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} p_{i-1} - \frac{1}{3} \left(\frac{1-2\mu_i}{E_i} \cdot \frac{r_i^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1+\mu_i}{2E_i} \cdot \frac{r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} + \frac{1-2\mu_{i+1}}{E_{i+1}} \cdot \frac{r_i^3}{r_{i+1}^3 - r_i^3} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1+\mu_{i+1}}{2E_{i+1}} \cdot \frac{r_{i+1}^3}{r_{i+1}^3 - r_i^3} \right) p_i + \frac{1-\mu_{i+1}}{2E_{i+1}} \cdot \frac{r_{i+1}^3}{r_{i+1}^3 - r_i^3} p_{i+1} = \\
 & \quad = \frac{r_i^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} (T_i)_{r=r_i} - \frac{r_{i+1}^3}{r_{i+1}^3 - r_i^3} (T_{i+1})_{r=r_{i+1}}. \quad (8) \\
 & (i=1, 2, \dots, n-1; p_0 = -p_0^*; p_n = -p_n^*).
 \end{aligned}$$

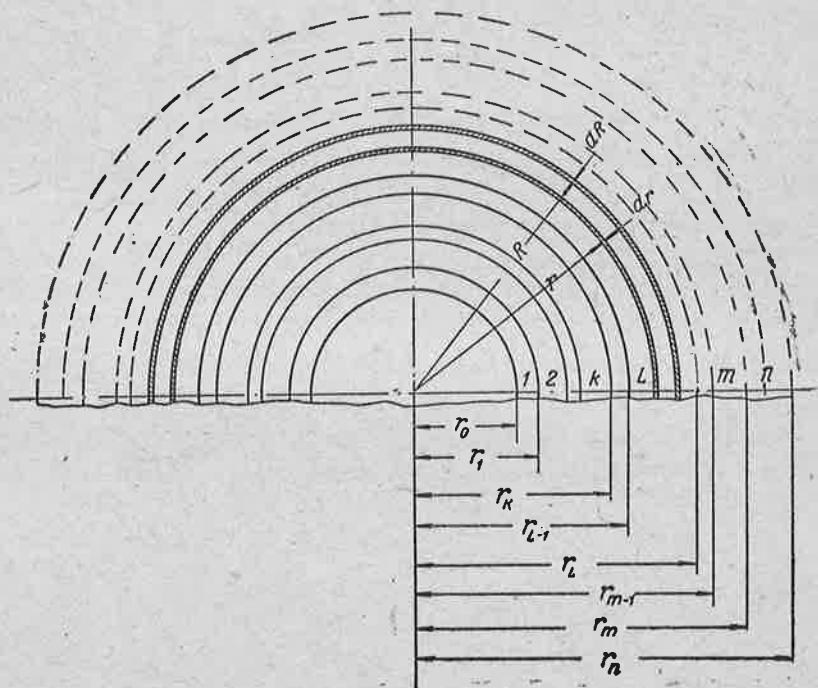


Рис. 2.

Система уравнений (8) сходна с системой уравнений трех моментов в теории неразрезных балок и решается методами решения системы трехчленных уравнений [5].

Собственные напряжения в многослойной гальванически наращенной сфере. Рассмотрим следующую задачу. Дана полая сфера, спаянная из k изотропных слоев (рис. 2). На эту сферу

гальванически наращивается $n-k$ слоев. Предполагается, что: 1) каждый слой спаян с соседними слоями по поверхностям сопряжения; 2) в процессе наращивания напряжения в материале не выходят за пределы упругости. Распределение собственной объемной деформации считается полярно-симметричным. Требуется определить собственные напряжения в каждом слое после завершения процесса наращивания.

Процесс гальванического осаждения металла рассмотрим как непрерывное наращивание бесконечно тонких элементарных слоев, в каждом из которых после наращивания протекают физико-химические процессы, сопровождающиеся собственной объемной деформацией.

Переменный в процессе наращивания наружный радиус сферы обозначим через R , а собственные напряжения в элементарном пограничном слое при наращивании L -го слоя — через $\sigma_{j*}^{(L)}$ ($j = r, \theta$).

Напряжения в элементарном слое r L -го слоя (рис. 2) постепенно меняются по мере наращивания сферы. Непосредственно после наращивания ($R=r$) в нем возникают напряжения $[\sigma_{j*}^{(L)}]_{R=r}$. Наращивание элементарного слоя R при $r < R < r_L$ и при $r_{m-1} < R < r_m$ добавляет в элементарном слое r соответственно напряжения $d\sigma_{jL}^{(L)}$ и $d\sigma_{jm}^{(L)}$.

Суммируя исходные напряжения $[\sigma_{j*}^{(L)}]_{R=r}$ и элементарные приращения $d\sigma_{jL}^{(L)}, d\sigma_{jm}^{(L)}$, получим для вычисления окончательных собственных напряжений $\sigma_j^{(L)}$ в элементарном слое r следующую формулу:

$$\sigma_j^{(L)} = [\sigma_{j*}^{(L)}]_{R=r} + \int_r^{r_L} \frac{\partial \sigma_{jL}^{(L)}}{\partial R} dR + \sum_m^n \int_{r_{m-1}}^{r_m} \frac{\partial \sigma_{jm}^{(L)}}{\partial R} dR, \quad (9)$$

где

$$j = r, \theta, \quad m = \begin{cases} k+1 & \text{при } L \leq k, \\ L+1 & \text{при } L > k. \end{cases}$$

$$L = 1, 2, \dots, n;$$

$$\sigma_{j*}^{(L)} = \sigma_{jL}^{(L)} = 0 \text{ при } L \leq k.$$

Перемещения и деформации определяются также суммированием соответствующих элементарных приращений. Например, для радиальных перемещений на внутренней поверхности сферы ($r=r_0$) имеем:

$$u_r^* = [u_r^{(1)}]_{r=r_0} = \sum_{m=k+1}^n \int_{r_{m-1}}^{r_m} \frac{\partial u_{rm}^*}{\partial R} dR. \quad (10)$$

Для вычисления напряжений $\sigma_{r^*}^{(L)}$ и элементарных приращений $d\sigma_{rl}^{(L)}$, $d\sigma_{0m}^{(L)}$, du_{rm}^* используем полученное выше решение задачи термоупругости для многослойной сферы. Считая в пределах наращенного элементарного пограничного слоя собственную объемную деформацию Δ_L равномерной, получаем задачу о термоупругом равновесии многослойной сферы (рис. 2) со следующим распределением температур:

$$t = 0 \text{ при } r_0 \leq r \leq R; \quad t = \frac{\beta_L}{\alpha_L} = \text{const, при } R \leq r \leq R + dR,$$

где $\beta_L = \frac{\Delta_L}{3}$ есть собственная линейная деформация осадка.

Эту задачу решим на основании формул (5) и (6). С точностью до бесконечно малых второго порядка имеем:

$$\sigma_{r^*}^{(L)} = 0, \quad \sigma_{\theta}^{(L)} = \sigma_{\theta}^{(L)*} = -\frac{E_L \beta_L}{1 - \mu_L}; \quad (11)$$

$$d\sigma_{rL}^{(L)} = -\frac{2}{r^3} \cdot \frac{r^3 - r_{L-1}^3}{R^3 - r_{L-1}^3} \sigma_{\theta}^{(L)*} R^2 dR + \frac{r_{L-1}^3}{R^3 - r_{L-1}^3} \times$$

$$\times \frac{R^3 - r^3}{r^3} dp_{L-1}^{(L)},$$

$$d\sigma_{\theta L}^{(L)} = -\frac{1}{r^3} \cdot \frac{2r^3 + r_{L-1}^3}{R^3 - r_{L-1}^3} \sigma_{\theta}^{(L)*} R^2 dR - \frac{r_{L-1}^3}{R^3 - r_{L-1}^3} \times$$

$$\times \frac{R^3 + 2r^3}{2r^3} dp_{L-1}^{(L)},$$

$$d\sigma_{rm}^{(L)} = \frac{r_L^3 dp_L^{(m)} - r_{L-1}^3 dp_{L-1}^{(m)}}{r_L^3 - r_{L-1}^3} - \frac{r_L^3 r_{L-1}^3}{r_L^3 - r_{L-1}^3} \times$$

$$\times \frac{dp_L^{(m)} - dp_{L-1}^{(m)}}{r^3},$$

$$d\sigma_{0m}^{(L)} = \frac{r_L^3 dp_L^{(m)} - r_{L-1}^3 dp_{L-1}^{(m)}}{r_L^3 - r_{L-1}^3} + \frac{r_L^3 r_{L-1}^3}{r_L^3 - r_{L-1}^3} \times$$

$$\times \frac{dp_L^{(m)} - dp_{L-1}^{(m)}}{2r^3};$$

$$du_{rm}^* = \frac{1 - 2\mu_L}{E_L} \cdot \frac{r_L^3 dp_L^{(m)} - r_{L-1}^3 dp_{L-1}^{(m)}}{r_L^3 - r_{L-1}^3} r_0 +$$

$$+ \frac{1 + \mu_L}{2E_L} \cdot \frac{r_L^3 r_{L-1}^3}{r_L^3 - r_{L-1}^3} \cdot \frac{dp_L^{(m)} - dp_{L-1}^{(m)}}{r_0^2}. \quad (13)$$

$(L = k + 1, k + 2, \dots, n; m = L + 1, L + 2, \dots, n; dp_0^{(1)} = 0)$.

Здесь $dp_{L-1}^{(L)}$ — элементарное радиальное усилие на поверхности сопряжения $r = r_{L-1}$ при наращивании L -го слоя;

$dp_{L-1}^{(m)}$ и $dp_L^{(m)}$ — элементарные усилия соответственно на поверхностях сопряжения $r = r_{L-1}$ и $r = r_L$ при наращивании m -го слоя.

Для определения элементарных усилий $dp_{L-1}^{(L)}$, $dp_{L-1}^{(m)}$ и $dp_L^{(m)}$ из (8) получим (с точностью до бесконечно малых второго порядка) следующие уравнения:

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \mu_{L-1}}{2E_{L-1}} \cdot \frac{r_{L-2}^3}{r_{L-1}^3 - r_{L-2}^3} dp_{L-2}^{(L)} - \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 2\mu_{L-1}}{E_{L-1}} \times \right. \\ & \times \frac{r_{L-1}^3}{r_{L-1}^3 - r_{L-2}^3} + \frac{1 + \mu_{L-1}}{2E_{L-1}} \cdot \frac{r_{L-2}^3}{r_{L-1}^3 - r_{L-2}^3} + \\ & \left. + \frac{1 - 2\mu_L}{E_L} \cdot \frac{r_{L-1}^3}{R^3 - r_{L-1}^3} + \frac{1 + \mu_L}{2E_L} \cdot \frac{R^3}{R^3 - r_{L-1}^3} \right) dp_{L-1}^{(L)} = \\ & = \frac{1 - \mu_L}{E_L} \cdot \frac{\sigma_*^{(L)} R^2}{R^3 - r_{L-1}^3} dR. \end{aligned} \quad (14)$$

$(L = k + 1, k + 2, \dots, n);$

$$\begin{aligned} & \frac{1 - \mu_i}{2E_i} \cdot \frac{r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} dp_{i-1}^{(L)} - \frac{1}{3} \left(\frac{1 - 2\mu_i}{E_i} \cdot \frac{r_i^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \mu_i}{2E_i} \cdot \frac{r_{i-1}^3}{r_i^3 - r_{i-1}^3} + \frac{1 - 2\mu_{i+1}}{E_{i+1}} \cdot \frac{r_i^3}{r_{i+1}^3 - r_i^3} + \right. \\ & \left. + \frac{1 + \mu_{i+1}}{2E_{i+1}} \cdot \frac{r_{i+1}^3}{r_{i+1}^3 - r_i^3} dp_i^{(L)} + \frac{1 - \mu_{i+1}}{2E_{i+1}} \times \right. \\ & \left. \times \frac{r_{i+1}^3}{r_{i+1}^3 - r_i^3} dp_{i+1}^{(L)} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$(i = 1, 2, \dots, L - 2; dp_0^{(1)} = 0)$.

Таким образом, в общем случае следует для решения задачи решить $n - k$ раз систему трехчленных уравнений, причем количество уравнений в системе постепенно увеличивается от k до $n - 1$.

Выше мы рассматривали расчет в пределах упругости. Рассмотрим теперь случай, когда материал в процессе наращивания сферы выходит за пределы упругости только в элементарном пограничном слое. Такой случай имеет место при условии, что функции $\xi_L(R)$ имеют одинаковый знак, который в промежутках $r_{L-1} \leq R \leq r_L$ не изменяется. При соблюдении этого условия во всех слоях, наращенных раньше элементарного пограничного слоя, происходит упругая разгрузка и, следовательно, полученные выше формулы действительны, кроме (11), по которой рассчитывается собственное напряжение в элементарном пограничном слое.

Для расчета собственных напряжений в элементарном пограничном слое используем следующие известные соотношения теории малых упругопластических деформаций [6]:

$$\sigma_j^{(L)} - \sigma_0^{(L)} = \frac{2\sigma_j^{(L)}}{3\varepsilon_j^{(L)}} [\varepsilon_j^{(L)} - \varepsilon_0^{(L)}] \quad (j = 1, 2, 3); \quad (16)$$

$$\sigma_j^{(L)} = \Phi_L [\varepsilon_j^{(L)}], \quad (17)$$

где $\sigma_j^{(L)}, \varepsilon_j^{(L)}$ — главные напряжения и деформации;

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0^{(L)} &= \frac{\sigma_1^{(L)} + \sigma_2^{(L)} + \sigma_3^{(L)}}{3}, & \varepsilon_0^{(L)} &= \frac{\varepsilon_1^{(L)} + \varepsilon_2^{(L)} + \varepsilon_3^{(L)}}{3}, \\ \sigma_j^{(L)} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{[\sigma_1^{(L)} - \sigma_2^{(L)}]^2 + [\sigma_2^{(L)} - \sigma_3^{(L)}]^2 + [\sigma_3^{(L)} - \sigma_1^{(L)}]^2}, \\ \varepsilon_j^{(L)} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{[\varepsilon_1^{(L)} - \varepsilon_2^{(L)}]^2 + [\varepsilon_2^{(L)} - \varepsilon_3^{(L)}]^2 + [\varepsilon_3^{(L)} - \varepsilon_1^{(L)}]^2}; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Φ_L — определенная для данного материала функция, получаемая из опыта.

Средняя деформация $\varepsilon_0^{(L)}$ связана со средним напряжением $\sigma_0^{(L)}$ законом Гука в любой стадии деформаций

$$\varepsilon_0^{(L)} = \frac{\sigma_0^{(L)}}{3K_L} + \beta_L, \quad (19)$$

где K_L — объемный модуль упругости;

$$K_L = \frac{E_L}{3(1-2\nu_L)}. \quad (20)$$

Для вычисления собственного напряжения $\sigma_0^{(L)}$ в элементарном пограничном слое при наращивании L -го слоя (рис. 2) в формулах (16) — (19) полагаем: $\sigma_1^{(L)} = \sigma_2^{(L)} = \sigma_3^{(L)}$, $\sigma_3^{(L)} = \sigma_{r_*}^{(L)} = 0$, $\varepsilon_1^{(L)} = \varepsilon_2^{(L)} = \varepsilon_0^{(L)} = 0$.

Тогда получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s^{(L)} &= -\sigma_i^{(L)}, \\ \sigma_i^{(L)} &= \frac{9K_L}{4} [2\beta_L - \varepsilon_i^{(L)}], \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\varepsilon_i^{(L)} = \Phi_L^{-1} [\sigma_i^{(L)}], \quad (22)$$

т. е. интенсивность деформаций $\varepsilon_i^{(L)}$ выражена через интенсивность напряжений $\sigma_i^{(L)}$.

В случае линейной аппроксимации (рис. 3) закона упрочнения имеем:

$$\varepsilon_i^{(L)} = \left\{ \begin{aligned} \frac{\sigma_i^{(L)}}{3G_L} & \quad \text{при } \varepsilon_i^{(L)} \leq \varepsilon_{is}^{(L)}, \\ \varepsilon_{is}^{(L)} + \frac{\sigma_i^{(L)} - \sigma_s^{(L)}}{\lambda_L} & \quad \text{при } \varepsilon_i^{(L)} \geq \varepsilon_{is}^{(L)}, \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

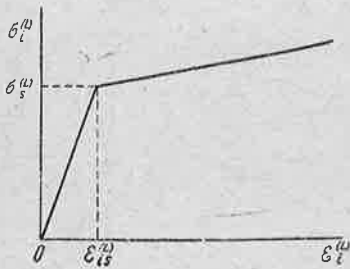


Рис. 3.

где $\sigma_s^{(L)}$ — предел текучести;

$$G_L = \frac{E_L}{2(1 + \nu_L)}; \quad \lambda_L = \frac{d\sigma_i^{(L)}}{d\varepsilon_i^{(L)}} \quad \text{при } \varepsilon_i^{(L)} > \varepsilon_{is}^{(L)}. \quad (24)$$

Подставляя выражения (23) в (21), получим:

$$\sigma_s^{(L)} = \left\{ \begin{aligned} -\frac{E_L \beta_L}{1 - \nu_L} & \quad \text{при } \varepsilon_i^{(L)} \leq \varepsilon_{is}^{(L)}; \\ \frac{9K_L}{4\lambda_L + 9K_L} \{\lambda_L [\varepsilon_{is}^{(L)} - 2\beta_L] - \sigma_s^{(L)}\} & \quad \text{при } \varepsilon_i^{(L)} \geq \varepsilon_{is}^{(L)}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Таким образом, при $\varepsilon_i^{(L)} \leq \varepsilon_{is}^{(L)}$ мы получили вторично, как и следовало ожидать, формулу (11).

Отметим, что полученные выше формулы действительны также для сплошной сферы ($r_0 = 0$).

Рассмотрим далее частный случай.

Сфера с одним гальванически наращенным слоем. В этом случае $n=2, k=1$ и из (14) следует

$$dp_1^{(2)} = -6\theta (1 - \nu_2) \frac{1 - \rho_0^3}{a_1} \cdot \frac{\sigma_s^{(2)2}}{\xi^3 - a_2} d\xi, \quad (26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{R}{r_1}, \quad \rho = \frac{r}{r_1}, \\ \rho_0 &= \frac{r_0}{r_1}, \quad \rho_2 = \frac{r_2}{r_1}, \quad \vartheta = \frac{E_1}{E_2}, \\ a_1 &= 2(1 - 2\mu_1) + (1 + \mu_1)\rho_0^3 + \vartheta(1 + \mu_2)(1 - \rho_0^3), \\ a_2 &= \frac{1}{a_1} [2(1 - 2\mu_1) + (1 + \mu_1)\rho_0^3 - 2\vartheta(1 - 2\mu_2)(1 - \rho_0^3)]. \end{aligned} \right\} (27)$$

Подставляя выражение (26) в (12), (13) и внося затем полученные зависимости в (9) и (10), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= 6\vartheta \frac{1 - \mu_2}{a_1} \cdot \frac{\rho^3 - \rho_0^3}{\rho^3} (P)_{\rho=1}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= 3\vartheta \frac{1 - \mu_2}{a_1} \cdot \frac{2\rho^3 + \rho_0^3}{\rho^3} (P)_{\rho=1}; \end{aligned} \right\} (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(2)} &= 2 \frac{\rho^3 - a_2}{\rho^3} P, \\ \sigma_\theta^{(2)} &= \frac{2\rho^3 + a_2}{\rho^3} P + [\sigma_*^{(2)}]_{\xi=\rho}; \end{aligned} \right\} (29)$$

$$u_r^* = \frac{r_0}{a_3} (P)_{\rho=1}; \quad (30)$$

$$P = \int_{\rho_2}^{\rho} \frac{\sigma_*^{(2)} \xi^2}{\xi^3 - a_2} d\xi; \quad (31)$$

$$a_3 = \frac{a_1 E_2}{9(1 - \mu_1)(1 - \mu_2)}. \quad (32)$$

Напряжения по формулам (28) и (29) удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{d\rho} + \frac{2}{\rho} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0, \quad (33)$$

граничным условиям

$$[\sigma_r^{(1)}]_{\rho=\rho_0} = 0, \quad [\sigma_r^{(2)}]_{\rho=\rho_2} = 0, \quad [\sigma_\theta^{(2)}]_{\rho=\rho_2} = [\sigma_*^{(2)}]_{\xi=\rho_2}$$

и условию на поверхности сопряжения слоев

$$[\sigma_r^{(1)}]_{\rho=1} = [\sigma_r^{(2)}]_{\rho=1}.$$

Окружное напряжение претерпевает у поверхности сопряжения слоев скачок, равный

$$[\sigma_{\theta}^{(2)} - \sigma_{\theta}^{(1)}]_{\rho=1} = \frac{3b}{a_1} (P)_{\rho=1} + [\sigma_{*}^{(2)}]_{\xi=1}, \quad (34)$$

где

$$b = 2 [1 - 2\mu_1 - \vartheta (1 - 2\mu_2)] + [1 + \mu_1 - \vartheta (1 + \mu_2)] \rho_0^3. \quad (35)$$

Напряжения $\sigma_r^{(1)}$ и $\sigma_{\theta}^{(1)}$ по (28) удовлетворяют также уравнению совместности

$$\frac{d}{d\rho} \left(\frac{\sigma_r}{2} + \sigma_{\theta} \right) = 0. \quad (36)$$

Подставляя напряжения $\sigma_r^{(2)}$ и $\sigma_{\theta}^{(2)}$ по (29) в (36), получим:

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{\sigma_r^{(2)}}{2} + \sigma_{\theta}^{(2)} \right] = \frac{d}{d\rho} \{ 3P + [\sigma_{*}^{(2)}]_{\xi=\rho} \}. \quad (37)$$

Таким образом, напряжения в наращенном слое не удовлетворяют условию сплошности термоупругой задачи, которое получается из (37) при $P=0$. Наличие члена $3P'$ в правой части уравнения (37) объясняется тем, что в результате пренебрежения бесконечно малыми второго и высшего порядка при выводе формул (11)—(13) мы получим разрыв окружных деформаций у поверхности сопряжения элементарного пограничного слоя и основания. В этом легко убедиться, если подставить соответствующие напряжения по формулам (11) и (12) в закон Гука.

Так как применимость формул (11) и (12) для вычисления собственных напряжений в сфере с весьма тонким гальванически наращенным пограничным слоем не вызывает сомнений, то наличие члена $3P'$ в правой части уравнения совместности следует считать особенностью рассматриваемой задачи.

Если сфера тонкостенная ($\rho_0 \rightarrow 1$, $\rho_2 \rightarrow 1$), то формулы (28)—(30) приближенно переходят в следующие:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\theta}^{(1)} &\approx 2x(\rho - \rho_0)(P_*)_{\rho=1}, & \sigma_{\theta}^{(1)} &\approx x(P_*)_{\rho=1}, \\ \sigma_r^{(2)} &\approx 2(\rho - c)P_*, & \sigma_{\theta}^{(2)} &\approx P_* + [\sigma_{*}^{(2)}]_{\xi=\rho}; \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

$$u_r^* \approx r_1 \frac{1 - \mu_2}{E_2} (P_*)_{\rho=1}, \quad (39)$$

где

$$P_* = \int_{\rho_2}^{\rho} \frac{\sigma_{*}^{(2)} d\xi}{\xi - c}; \quad (40)$$

$$c = 1 - x(1 - \rho_0), \quad x = \vartheta \frac{1 - \mu_2}{1 - \mu_1}. \quad (41)$$

Собственная линейная деформация осадка β_L определяется по экспериментально измеренным деформациям или перемещениям, происшедшим при гальваническом наращивании тонкостенных тел простой формы. В частности для определения β_L можно измерить (например по принципу «гидравлического рычага» [7]) радиальные перемещения $u_{r_2}^*$ на внутренней поверхности тонкостенной сферы, происшедшие при ее гальваническом наращивании.

Для вычисления β_L по найденной из опыта функции $u_{r_2}^*(\xi)$ подставим выражение (26) в (13). В результате получим:

$$\sigma_*^{(2)} = \frac{a_3}{r_0} \cdot \frac{a_2 - \xi^3}{\xi^2} \cdot \frac{du_{r_2}^*}{d\xi}. \quad (42)$$

Соответствующая приближенная формула для тонкостенной сферы имеет вид

$$\sigma_*^{(2)} \approx \frac{E_2}{1 - \mu_2} \cdot \frac{c - \xi}{r_1} \cdot \frac{du_{r_2}^*}{d\xi}. \quad (43)$$

Теперь вычисление β_L по формуле (11) или (12) не представляет трудности.

Располагая функцией $u_{r_2}^*(\xi)$, можно вычислить собственные напряжения в данной сфере. Подставляя (42) в (28) и (29), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{E_1}{1 - \mu_1} \cdot \frac{\rho^3 - \rho_0^3}{r_0 \rho^3} (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{E_1}{1 - \mu_1} \cdot \frac{2\rho^3 + \rho_0^3}{r_0 \rho^3} (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2}; \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(2)} &= 2a_3 \frac{\rho^3 - a_2}{r_0 \rho^3} [(u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2} - (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho}], \\ \sigma_\theta^{(2)} &= \frac{a_3}{r_0} \left\{ \frac{2\rho^3 + a_2}{\rho^3} [(u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2} - (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho}] - \frac{\rho^3 - a_2}{\rho^3} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d}{d\rho} (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Если выражение (43) подставим в (38), то для расчета напряжений получим приближенные формулы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &\approx \frac{2E_1}{1 - \mu_1} \cdot \frac{\rho - \rho_0}{r_1} (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2}, \\ \sigma_\theta^{(1)} &\approx \frac{1}{r_1} \cdot \frac{E_1}{1 - \mu_1} (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2}; \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\sigma_r^{(2)} \approx \frac{2E_2}{1-\mu_2} \cdot \frac{\rho-c}{r_1} [(u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2} - (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho}],$$

$$\sigma_\theta^{(2)} \approx \frac{1}{r_1} \cdot \frac{E_2}{1-\mu_2} [(u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2} - (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho} - (\rho-c) \frac{d}{d\rho} \times \times (u_{r_2}^*)_{\xi=\rho}]. \quad (47)$$

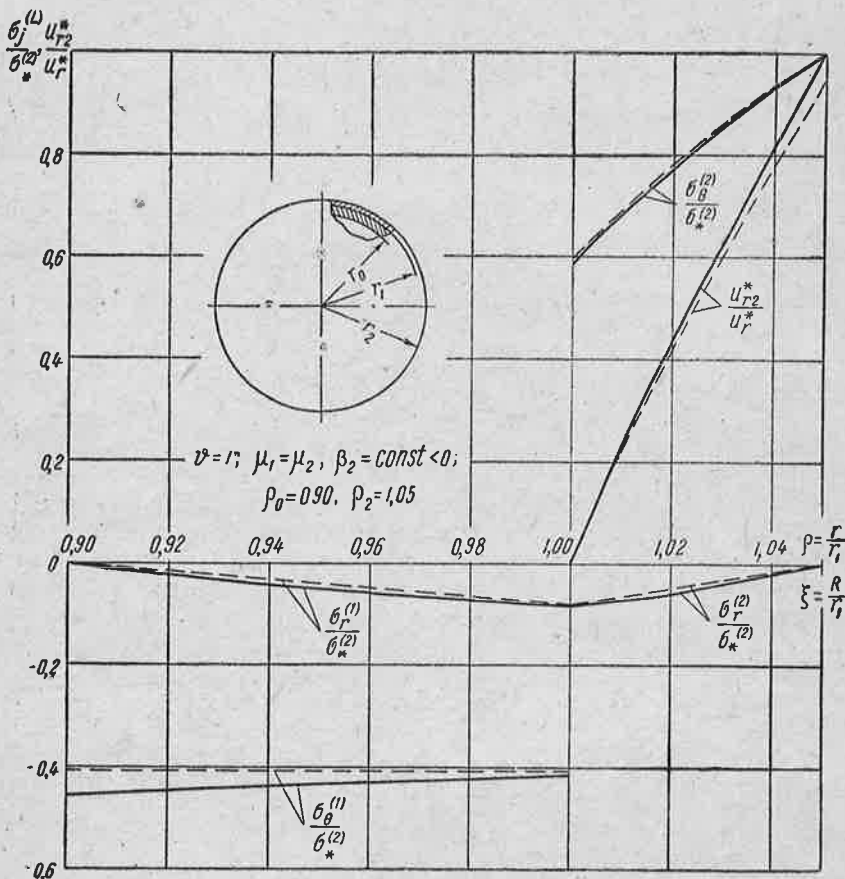


Рис. 4.

Если функция $u_{r_2}^*(\xi)$ построена в результате обработки опытных данных, полученных при электролитическом или химическом снятии наращенного слоя, то исходные собственные напряжения в снятой области определяется при $(u_{r_2}^*)_{\xi=\rho_2} = 0$ по формуле (45) или (47).

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда $\beta_2 = \text{const}$. Произведя в (31) интегрирование при $\sigma_*^{(2)} = \text{const}$, находим:

$$P = \frac{\sigma_*^{(2)}}{3} \ln \frac{\rho^3 - a_2}{\rho_2^3 - a_2}, \quad (48)$$

т. е. собственные напряжения распределяются по логарифмическому закону.

Интегрируя дифференциальное уравнение (42), получим:

$$u_{r_1}^* = \frac{\sigma_*^{(2)}}{3} \cdot \frac{r_0}{a_3} \ln \frac{1 - a_2}{\xi^3 - a_2}. \quad (49)$$

Для расчета по приближенным формулам (38) и (39) из (40) и (43) находим:

$$P_* = \sigma_*^{(2)} \ln \frac{\rho - c}{\rho_2 - c}; \quad (50)$$

$$u_{r_2}^* \approx r_1^2 \frac{1 - \mu_2}{E_2} \ln \frac{1 - c}{\xi - c}. \quad (51)$$

На рис. 4 приведены эпюры собственных напряжений и график перемещений $u_{r_2}^*$ при $\theta = 1$; $\mu_1 = \mu_2$; $\beta_2 = \text{const} < 0$ ($\sigma_*^{(2)} = \text{const} > 0$); $\rho_0 = 0,90$; $\rho_2 = 1,05$. Сплошными линиями даны эпюры собственных напряжений и график перемещений $u_{r_2}^*$, рассчитанные по точным формулам (28), (29) и (49), а пунктирными линиями — по приближенным формулам (38) и (51).

Из графиков видно, что приближенные формулы обеспечивают при $\rho_2 - \rho_0 < 0,15$ удовлетворительную точность.

Литература

1. А. Т. Ваграмян и Ю. С. Петрова. Физико-механические свойства электролитических осадков. Изд. АН СССР, 1960.
2. Я. П. Кыо. Расчет собственных напряжений в гальванических покрытиях по деформации катодной пластинки. Сб. научных трудов Эстонской сельскохозяйственной академии, т. 13, 1959.
3. Я. П. Кыо. Расчет собственных напряжений в круглых цилиндрах с гальваническим покрытием. Зап. ЛСХИ, т. 82, 1960.
4. С. П. Тимошенко. Теория упругости. ОНТИ, 1937.
5. А. А. Уманский. Специальный курс строительной механики, ч. 1. ОНТИ, 1935.
6. А. А. Ильюшин. Пластичность. Гостехиздат, 1948.
7. E. I. Mills. On electrostriction, Proc. Roy. Soc., vol 26A, Nr. 184 p. 504, 1877.