

АКАДЕМИЯ НАУК ЛАТВИЙСКОЙ ССР

МЕХАНИКА КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

1984 • 4

577—768

Июль—август

Всесоюзный научно-теоретический журнал
Основан в 1965 г. Выходит 6 раз в год

РИГА  «ЗИНАТНЕ»

УДК 620.17:677.5

Я. П. Кыю

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ВОЛОКНАХ
МЕТОДОМ ЗАМЕРА ОСЕВОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

В [1, 2] разработана оригинальная методика для определения остаточных напряжений в борных волокнах по осевой деформации, замеренной в процессе анодного растворения волокна. Однако эта методика позволяет лишь приближенно исследовать осевые напряжения без учета радиального и окружного напряжений. В настоящей

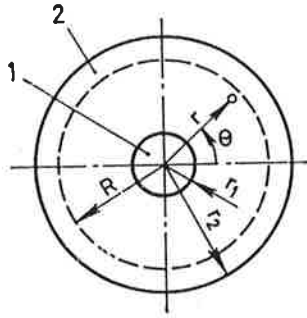


Рис. 1. Пояснения в тексте.

работе дается развитие теории метода замера осевой деформации, которое позволяет установить все компоненты объемного остаточного напряженного состояния волокна.

Рассматривается волокно (рис. 1), отнесенное к цилиндрическим координатам r, θ, z и состоящее из сердечника 1 радиусом r_1 и слоя основного материала 2 внешним радиусом r_2 . Для определения остаточного напряженного состояния, которое считается осесимметричным и постоянным по длине, измеряют осевую деформацию $\varepsilon_z(R)$ в процессе непрерывного изменения радиуса волокна R от r_1 до r_2 (случай наращивания волокна) или от r_2 до r_1 (случай растворения во-

локна). Задача состоит в вычислении остаточных напряжений по данным измерения деформации.

Решение поставленной задачи осуществляем в два этапа. На первом этапе найдем напряженно-деформированное состояние, соответствующее изменению радиуса волокна на величину dR . На втором этапе, используя результаты первого этапа, найдем дополнительные напряжения, соответствующие изменению радиуса волокна в интервале $r < R \leq r_2$. Суммирование напряжений, найденных на первом и втором этапах, даст искомые остаточные напряжения.

Приступив к рассмотрению первого этапа, будем предполагать, что напряженное состояние поверхностного слоя dR характеризуется компонентами $\bar{\sigma}_\theta(R) = \bar{\sigma}_z(R) = \bar{\sigma}(R)$, где $\bar{\sigma}(R)$ — поверхностное напряжение. Из условия равновесия элемента поверхностного слоя вытекает, что радиальное напряжение у поверхности радиусом R имеет величину

$$d\bar{\sigma}_r(R) = -\frac{\bar{\sigma}(R)}{R} dR. \quad (1)$$

Итак, мы пришли к задаче Ламе для длинного составного цилиндра, нагруженного равномерно распределенной радиальной нагрузкой (1). Согласно решению этой задачи для однородного цилиндра [3], можно радиальное и окружное напряжения в волокне выразить формулами

$$\left. \begin{aligned} d\sigma^*_{ri}(r, R) \\ d\sigma^*_{\theta i}(r, R) \end{aligned} \right\} = f_i(R) \pm \frac{g_i(R)}{r^2} \quad (i=1, 2). \quad (2)$$

Здесь и далее индексы $i=1$ и 2 обозначают величины, относящиеся к сердечнику и слою основного материала соответственно. Функции $f_i(R)$ и $g_i(R)$ подлежат определению из условий сопряжения на поверхностях $r=R, r=r_1$ и из условия равенства радиального и окружного напряжений при $r=0$. Для удовлетворения последнего условия следует, очевидно, положить $g_1(R)=0$.

Из соотношений обобщенного закона Гука вытекают зависимости, связывающие напряжения и деформации:

$$\begin{aligned} d\sigma^*_{zi}(R) &= E_i d\varepsilon_z(R) + \mu_i [d\sigma^*_{ri}(r, R) + d\sigma^*_{\theta i}(r, R)]; \\ d\varepsilon_{\theta i}(r, R) &= \frac{1-\mu_i^2}{E_i} \left[d\sigma^*_{\theta i}(r, R) - \frac{\mu_i}{1-\mu_i} d\sigma^*_{ri}(r, R) \right] - \mu_i d\varepsilon_z(R) \quad (i=1, 2), \end{aligned} \quad (3)$$

где E_i, μ_i — модуль упругости и коэффициент Пуассона. В (3) и всюду ниже осевая деформация и осевое напряжение считаются функциями только переменного внешнего радиуса R . Это упрощение обосновывается принятием гипотезы плоских сечений и тем обстоятельством, что согласно (2) сумма радиального и окружного напряжений не зависит от радиуса r . На поверхностях $r=R$ и $r=r_1$ выполняются условия сопряжения

$$\begin{aligned} d\sigma^*_{r2}(R, R) &= \bar{d}\sigma_r(R); \quad d\sigma^*_{r1}(r_1, R) = d\sigma^*_{r2}(r_1, R); \\ d\varepsilon_{\theta 1}(r_1, R) &= d\varepsilon_{\theta 2}(r_1, R). \end{aligned} \quad (4)$$

Кроме того распределение осевых напряжений должно удовлетворить условию равенства нулю осевой силы

$$r_1^2 d\sigma^*_{z1}(R) + (R^2 - r_1^2) d\sigma^*_{z2}(R) + 2R\bar{\sigma}(R) dR = 0. \quad (5)$$

Уравнения (1) — (5) дают возможность выразить поверхностное напряжение $\bar{\sigma}(R)$ и напряжения $d\sigma^*_{r1}(r, R)$, $d\sigma^*_{\theta1}(r, R)$, $d\sigma^*_{z1}(R)$ через осевую деформацию $e_z(R)$ и тем самым получить решение первого этапа.

Переходя ко второму этапу, находим дополнительные напряжения в слое основного материала путем интегрирования функций $d\sigma^*_{r2}(r, R)$, $d\sigma^*_{\theta2}(r, R)$ и $d\sigma^*_{z2}(R)$ по R в пределах от r до r_2 . Суммируя поверхностное и дополнительные напряжения и вводя попутно безразмерные радиусы $\rho = r/r_1$, $\alpha = r_2/r_1$, находим остаточные напряжения в слое основного материала ($1 \leq \rho \leq \alpha$):

$$\sigma_{r2}(\rho) = \sigma^*_{r2}(\rho); \quad \sigma_{\theta2}(\rho) = \bar{\sigma}(\rho) + \sigma^*_{\theta2}(\rho); \quad \sigma_{z2}(\rho) = \bar{\sigma}(\rho) + \sigma^*_{z2}(\rho). \quad (6)$$

Интегрирование функций $d\sigma^*_{r1}(R) = d\sigma^*_{\theta1}(R)$ и $d\sigma^*_{z1}(R)$ по R в пределах от r_1 до r_2 доставит выражения дополнительных напряжений в сердечнике. Допустим, что сердечник без слоя основного материала свободен от напряжений. Тогда остаточные напряжения в нем ($0 \leq \rho \leq 1$) равны дополнительным напряжениям, т. е.

$$\sigma_{r1} = \sigma_{\theta1} = \sigma^*_{r1} = \sigma^*_{\theta1}; \quad \sigma_{z1} = \sigma^*_{z1}. \quad (7)$$

В формулах (6) и (7)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\rho) &= - \frac{E_1}{2(1-\mu_2)} \frac{q(\rho)}{\rho_0(\rho)\rho} \frac{de_z(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\rho}; \\ \left. \begin{aligned} \sigma^*_{r2}(\rho) \\ \sigma^*_{\theta2}(\rho) \end{aligned} \right\} &= \frac{E_1}{2(1-\mu_2)} \left[\int_{\rho}^{\alpha} \frac{p_2(\xi)}{\rho_0(\xi)} \frac{de_z(\xi)}{d\xi} d\xi \pm \frac{1}{\rho^2} \int_{\rho}^{\alpha} \frac{p_4(\xi)}{\rho_0(\xi)} \frac{de_z(\xi)}{d\xi} d\xi \right]; \\ \sigma^*_{z2}(\rho) &= \frac{E_1}{1-\mu_2} \int_{\rho}^{\alpha} \frac{p_6(\xi)}{\rho_0(\xi)} \frac{de_z(\xi)}{d\xi} d\xi; \\ \sigma^*_{r1} = \sigma^*_{\theta1} &= E_1 \int_1^{\alpha} \frac{p_8(\xi)}{\rho_0(\xi)} \frac{de_z(\xi)}{d\xi} d\xi; \quad \sigma^*_{z1} = E_1 \int_1^{\alpha} \frac{p_{10}(\xi)}{\rho_0(\xi)} \frac{de_z(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned}$$

Здесь введены безразмерные радиус волокна $\xi = R/r_1$ и целые рациональные функции $q(\xi) = a_0\xi^4 + a_1\xi^2 + a_2$; $p_j(\xi) = b_j\xi^2 + b_{j+1}$ ($j=0, 2, \dots, 10$), где $a_0 = [(1-2\mu_1)\vartheta + \lambda]\vartheta$; $a_1 = [1-2\mu_2-2\mu_1\lambda-2(1-2\mu_1)\vartheta]\vartheta + \lambda$; $a_2 = [1-2\mu_2-(1-2\mu_1)\vartheta](\lambda-\vartheta)$; $b_0 = (1-2\mu_1)\vartheta + \lambda$; $b_1 = (1-2\mu_1)(\lambda-\vartheta)$; $b_2 = a_0$; $b_3 = [(1-2\mu_1)\vartheta + 1](\lambda-\vartheta)$; $b_4 = [2-\lambda-\vartheta-2(\mu_2-\mu_1)\vartheta]\vartheta$; $b_5 = a_2$; $b_6 = a_0$; $b_7 = [(1-2\mu_1)\vartheta + \mu_2](\lambda-\vartheta)$; $b_8 = \vartheta$; $b_9 = \lambda-\vartheta$; $b_{10} = \lambda+\vartheta$; $b_{11} = b_9$, причем $\vartheta = E_2/E_1$; $\lambda = (1+\mu_2)/(1+\mu_1)$.

В частных случаях расчет остаточных напряжений упрощается. При $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ($\lambda = 1$) имеем

$$\frac{q(\rho)}{\rho_0(\rho)} = \vartheta\rho^2 - \vartheta + 1.$$

При $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ($\lambda = 1$) и $E_1 = E_2 = E$ ($\vartheta = 1$) поверхностное и дополнительные напряжения в (6) и (7) вычисляются при помощи простых формул

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\rho) &= - \frac{E\rho}{2(1-\mu)} \frac{de_z(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=\rho}; \\ \sigma^*_{r2}(\rho) = \sigma^*_{\theta2}(\rho) &= \frac{E}{2(1-\mu)} e_z(\xi) \Big|_{\rho}^{\alpha}; \quad \sigma^*_{z2}(\rho) = \frac{E}{1-\mu} e_z(\xi) \Big|_{\rho}^{\alpha}, \end{aligned}$$

где в случае растворения волокна следует положить $e_z(\alpha) = 0$.

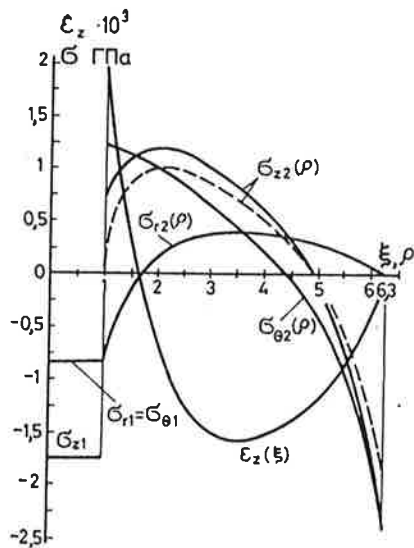


Рис. 2. Пояснения в тексте.

В качестве иллюстративного примера на рис. 2 приведены результаты вычисления остаточных напряжений в борволокне диаметром 102 мкм. При расчете использовались результаты измерения осевой деформации из [1], полученные при растворении волокна, характеризующего следующими параметрами: $r_1=8,1$ мкм, $r_2=51$ мкм, $E_1=669$ ГПа, $E_2=393$ ГПа, $\mu_1=\mu_2=0,21$. Сплошными линиями представлены деформационная кривая, полученная в результате аппроксимации экспериментальной информации кубическими сплайнами, и эпюры остаточных напряжений, вычисленные по формулам (6) и (7). Штриховая линия представляет собой распределение осевых остаточных напряжений по приближенной формуле, предложенной в [1]. Как видно, эта формула дает заниженные значения осевых напряжений, причем наибольшее расхождение наблюдается у поверхности сопряжения сердечника и борного слоя.

Таким образом, данное развитие теории метода замера осевой деформации позволяет определить все компоненты объемного остаточного напряженного состояния волокна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Behrendt D. R. Longitudinal residual stresses in boron fibers. — In: Composite Materials: Testing and Design (4th Conf.). ASTM STP 617. Philadelphia, 1977, p. 215—226.
2. Цирлин А. М., Щетилина Е. А., Оболенский А. В., Посохина Э. Г., Балагурова Н. М., Пронин Ю. Е. Исследование остаточных напряжений в борных нитях. — Механика композит. материалов, 1982, № 5, с. 771—774.
3. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. М., 1975. 576 с.

Эстонская сельскохозяйственная академия, Тарту

Поступило в редакцию 01.06.83
Механика композитных материалов,
1984, № 4, с. 747—750