

EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA
ЭСТОНСКАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

**EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA
TEADUSLIKE TÖÖDE KOGUMIK**

**VABARIIKLIKU PÕLLUMAJANDUSE MEHCHANISEERIMISALASE
TEADUSLIKU KONVERENTSI MATERJALID**

(3.—5. aprillini 1969. a.)

**СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ЭСТОНСКОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ**

**МАТЕРИАЛЫ РЕСПУБЛИКАНСКОЙ КОНФЕРЕНЦИИ
ПО МЕХАНИЗАЦИИ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА**

(3—5 апреля 1969 г.)

67

TARTU 1971

ЕЩЕ РАЗ О СИЛОВОМ И ДЕФОРМАЦИОННОМ МЕТОДАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОКРЫТИЯХ ЗАЩЕМЛЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИНОК

Кандидат технических наук Я. Кыо
доцент кафедры строительной механики ЭСХА

Расчетная формула силового метода для определения остаточных напряжений в покрытиях жестко защемленных стержней прямоугольного сечения при неодинаковых модулях упругости материалов стержня и покрытия была впервые выведена в работе [1].* В статье [3] путем преобразования формул силового метода из работы [1] получена расчетная формула деформационного метода. Наши заметки [4, 5] посвящены также выводу расчетных формул силового и деформационного методов, однако результаты получились отличными от работ [1, 3]. С целью устранить возникшие недоразумения излагается ниже еще раз вывод расчетных формул силового и деформационного методов. При этом, в отличие от работ [1—5], проводится четкое разграничение двух вариантов защемления стержня и обобщаются полученные формулы на случай, когда покрытие наращивается на пластинку.

1. Исходные уравнения

В опытах могут встречаться главным образом два варианта защемления стержня:

- 1) жесткое (неподвижное) защемление;
- 2) свободное (подвижное) защемление.

При жестком защемлении (рис. 1) концы стержня закреплены неподвижно. При свободном защемлении (рис. 2) концы стержня могут свободно перемещаться в направлении оси, а угол поворота равен нулю.

Следуя И. А. Биргеру [6], можно краевые зоны исключить,

* См. также монографию [2].

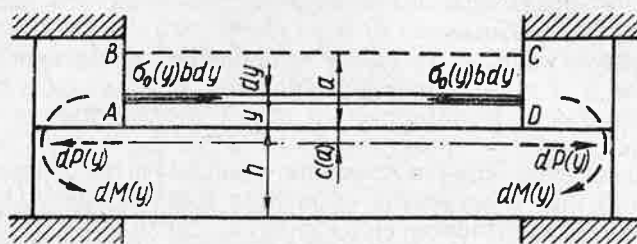


Рис. 1.

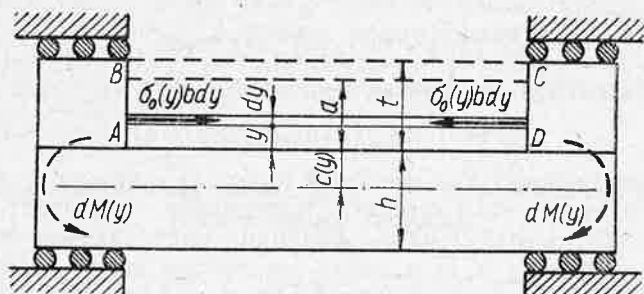


Рис. 2.

как это показано на рис. 1, 2, и считать остаточное напряженное состояние в средней части стержня и покрытия одноосным и постоянным по длине.

При наращивании элементарного слоя покрытия на расстоянии y от верхней грани стержня в нем возникают начальные напряжения $\sigma_0(y)$, которые предполагаем положительными. Эти напряжения сводятся к элементарным силам $\sigma_0(y)b dy$ (b — ширина стержня), действующим по плоскостям AB и CD (рис. 1, 2).

При жестком защемлении стержня элементарные силы $\sigma_0(y)b dy$ и их момент относительно нейтральной линии чистого изгиба при толщине покрытия a уравниваются элементарными реактивными силами $dP(y)$ и моментами $dM(y)$ (рис. 1). При толщине покрытия a действуют в защемлениях реактивные (возвращающие) силы

$$P(a) = b \int_0^a \sigma_0(y) dy \quad (1)$$

и моменты

$$M(a) = b \int_0^a \sigma_0(y) [c(a) + y] dy, \quad (2)$$

где $c(a)$ — расстояние нейтральной линии чистого изгиба от верхней грани стержня.

В формулах (1), (2) и всюду в дальнейшем считают реактивные силы и моменты положительными, если силы устраняют сжатие стержня, а моменты — изгиб вогнутостью в сторону покрытия.

Освобождение концов стержня эквивалентно приложению реактивных сил и моментов обратного направления. Пренебрегая влиянием реактивных сил на изгиб, приходим к задаче чистого изгиба стержня и покрытия моментами $M(a)$.

Решая эту задачу при помощи общих соотношений теории стержней с переменными параметрами упругости [7], находим расстояние

$$c(a) = (h^2 - \gamma a^2) / 2(h + \gamma a) \quad (3)$$

и прогиб на середине участка длиной l

$$f(a) = -3l^2 B(a) M(a) / 2EbD(a). \quad (4)$$

В этих выражениях h — толщина (высота) стержня; $\gamma = E_n/E$ — отношение модулей упругости материалов покрытия (E_n) и стержня (E); $B(a)$, $D(a)$ — функции, определяемые выражениями

$$B(a) = h + \gamma a,$$

$$D(a) = h^4 + 4\gamma h^3 a + 6\gamma h^2 a^2 + 4\gamma h a^3 + \gamma^2 a^4.$$

В формуле (4) и ниже прогиб считается положительным, если он направлен в сторону покрытия.

При свободном защемлении стержня (рис. 2) силы $\sigma_0(y) b dy$ уравниваются не реактивными силами, а внутренними продольными силами в нейтральном слое чистого изгиба, который при толщине покрытия y находится на расстоянии $c(y)$ от верхней грани стержня. Моменты сил $\sigma_0(y) b dy$ относительно нейтральной линии уравниваются элементарными реактивными моментами $dM(y)$. При толщине покрытия a реактивные моменты выразятся

$$M(a) = b \int_0^a \sigma_0(y) [c(y) + y] dy. \quad (5)$$

Отсюда можно найти начальные напряжения $\sigma_0(a)$, возникающие в процессе образования слоя a . При увеличении толщины покрытия от a до t образуются в слое a дополнительные напряжения $\sigma'(a)$. Таким образом, остаточные напряжения в слое a

$$\sigma(a) = \sigma_0(a) + \sigma'(a).$$

Дополнительные напряжения $\sigma'(a)$ определяются суммированием элементарных напряжений $d\sigma'(a)$, возникающих от нара-

щивания слоев покрытия при $y > a$. Учитывая, что напряжения $d\sigma'(a)$ вызываются сжатием стержня силами $\sigma_0(y) b dy$ и используя общее выражение напряжений в неоднородном стержне [7], находим

$$\sigma'(a) = -\gamma \int_a^l \frac{\sigma_0(y)}{B(y)} dy. \quad (6)$$

Прогиб, возникающий при освобождении концов стержня, определяется по-прежнему из формулы (4).

В силовом методе, когда измеряют реактивную силу или реактивный момент, исходными уравнениями для определения остаточных напряжений являются интегральные уравнения (1), (2) и (5). Расчетные формулы деформационного метода при замере прогиба могут быть получены, если в формулах силового метода выразить при помощи зависимости (4) реактивный момент через прогиб.

2. Определение остаточных напряжений в покрытии жестко заземленного стержня *

Укажем сперва расчетную формулу для варианта силового метода, в котором измеряют реактивную силу. Дифференцируя обе части интегрального уравнения (1) по a , получаем формулу

$$\sigma_0(a) = \frac{1}{b} \cdot \frac{dP(a)}{da}. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь известный вариант силового метода, в котором измеряют реактивный момент [1, 2]. Для определения остаточных напряжений имеем интегральное уравнение Вольterra первого рода (2), которое может быть решено путем сведения к линейному дифференциальному уравнению.

Подставляя значение $c(a)$ по формуле (3) в уравнение (2) и дифференцируя затем полученное выражение по a , находим

$$\frac{B^2(a)}{A(a)} \cdot \frac{dM(a)}{da} = \frac{b}{2} \left[B(a) \sigma_0(a) - \gamma \int_0^a \sigma_0(y) dy \right], \quad (8)$$

где

$$A(a) = h^2 + 2ha + \gamma a^2.$$

Из соотношения (8) при $a=0$ находим остаточные напряжения у верхней грани стержня

$$\sigma_0(0) = \frac{2}{bh} \cdot \frac{dM(a)}{da} \Big|_{a=0}. \quad (9)$$

* По материалам доклада, сделанного автором на республиканской научной конференции по механизации и электрификации сельского хозяйства [8].

Дифференцируя выражение (8) по a , приходим к линейному дифференциальному уравнению

$$\frac{2}{b} \left[\frac{2(\gamma-1)h^2}{A^2(a)} \cdot \frac{dM(a)}{da} + \frac{B(a)}{A(a)} \cdot \frac{d^2M(a)}{da^2} \right] = \frac{d\sigma_0(a)}{da},$$

откуда с учетом формулы (9) находим

$$\begin{aligned} \sigma_0(a) = \frac{2}{b} \left[\frac{1}{h} \cdot \frac{dM(a)}{da} \Big|_{a=0} + 2(\gamma-1) \int_0^a \frac{h^2}{A^2(y)} \cdot \frac{dM(y)}{dy} dy + \right. \\ \left. + \int_0^a \frac{B(y)}{A(y)} \cdot \frac{d^2M(y)}{dy^2} dy \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

Вычислив здесь последний интеграл по частям и выполняя несложные преобразования, получим расчетную формулу силового метода при замере реактивного момента

$$\sigma_0(a) = \frac{2}{b} \left[\frac{B(a)}{A(a)} \cdot \frac{dM(a)}{da} + \int_0^a \frac{\gamma}{A(y)} \cdot \frac{dM(y)}{dy} dy \right]. \quad (11)$$

Если в выражении (10) вычислить оба интеграла по частям, то приходим к значительно более громоздкой формуле, которая была впервые получена в статье [1] и затем приведена также в работах [2, 3].

При одинаковых модулях упругости покрытия и стержня ($\gamma=1$) формула (11) переходит в известную формулу (6) по работе [9].

Отметим, что из двух рассмотренных вариантов силового метода вариант, в котором замеряют реактивную силу, подкупает простотой расчета, не требующего вычисления интеграла и знания модулей упругости материалов стержня и покрытия.

Расчетную формулу деформационного метода получим из формулы силового метода (11) путем исключения реактивного момента при помощи зависимости (4). Подставляя производные от момента в выражение (11), после некоторых преобразований приходим к формуле

$$\sigma_0(a) = -\frac{4E}{3l^2} \left[\frac{D(a)}{A(a)} \cdot \frac{df(a)}{da} + 4\gamma \frac{C(a)}{A(a)} f(a) + 2\gamma \int_0^a \frac{D(y)}{A^2(y)} f(y) dy \right], \quad (12)$$

где

$$C(a) = h^3 + 3h^2a + 3ha^2 + \gamma a^3.$$

Аналогичный вывод формулы деформационного метода можно найти в статье [3]. Однако авторы этой работы, используя формулу силового метода из работы [1], пришли к формуле более громоздкой, чем формула (12).

В статье [10] вывод формулы деформационного метода изложен путем решения интегрального уравнения Вольтерра. Однако в полученном результате последний член имеет вид (в наших обозначениях)

$$2\sqrt{\frac{D(a)}{A^2(a)}} \int_0^a f(y) dy,$$

что не сходится с соответствующим членом формулы (12), где функция $D(y)/A^2(y)$ находится под знаком интеграла. Указанное расхождение является, по-видимому, погрешностью работы [10].

3. Определение остаточных напряжений в покрытии свободно заземленного стержня

При силовом методе начальные напряжения определяются из интегрального уравнения (5). Подставляя значение $c(y)$ по формуле (3) в уравнение (5) и дифференцируя затем полученное выражение по a , находим

$$\sigma_0(a) = \frac{2}{b} \cdot \frac{B(a)}{A(a)} \cdot \frac{dM(a)}{da}. \quad (13)$$

Определяя с учетом выражения (13) по формуле (6) дополнительные напряжения $\sigma'(a)$ и суммируя затем начальные и дополнительные напряжения, приходим к расчетной формуле силового метода

$$\sigma(a) = \frac{2}{b} \left[\frac{B(a)}{A(a)} \cdot \frac{dM(a)}{da} - \int_a^t \frac{\nu}{A(y)} \cdot \frac{dM(y)}{dy} dy \right]. \quad (14)$$

Такая же формула была получена в нашей работе [4] путем решения интегрального уравнения Вольтерра.

Таким образом, формулы, полученные в работе [1] и в статье [4], относятся к различным вариантам заземления стержня. Поэтому следует считать неправильным проведенное нами [4] сравнение расчетных формул по работам [1] и [4]. Однако замечание, сделанное в статье [4] относительно необоснованного применения в работе [1] принципа приложения обратных остаточных напряжений, остается в силе.*

Расчетные формулы деформационного метода можно получить из выражений (13) и (14) путем исключения реактивного момента при помощи зависимости (4). В итоге находим

* Это замечание относится также к работе [10].

$$\sigma_0(a) = -\frac{4E}{3l^2} \left[\frac{D(a)}{A(a)} \cdot \frac{df(a)}{da} + 3\gamma \frac{A(a)}{B(a)} f(a) \right]; \quad (15)$$

$$\sigma(a) = -\frac{4E}{3l^2} \left[\frac{D(a)}{A(a)} \cdot \frac{df(a)}{da} + 4\gamma \frac{C(a)}{A(a)} f(a) - \right. \\ \left. - \gamma \frac{D(t)f(t)}{A(t)B(t)} - 2\gamma \int_a^t \frac{D(y)}{A^2(y)} f(y) dy \right]. \quad (16)$$

Заметим, что из формулы (14) можно получить также формулу деформационного метода при наращивании покрытия на стержень со свободными концами [5].

4. Замечания к полученным формулам

1. Приведенные выше формулы относятся к случаю, когда покрытие наращивается на одну грань стержня прямоугольного сечения и в покрытии образуется одноосное напряженное состояние. При нанесении покрытия на пластинку с защемленным контуром произвольной формы в пластинке и в покрытии образуется, очевидно, двухосное остаточное напряженное состояние. Предполагая, что главные напряжения в основной зоне покрытия равны и меняются только по толщине покрытия, приходим к задаче чистого изгиба биметаллической пластинки. Решая эту задачу при известных допущениях технической теории изотропных тонких пластинок [11], мы убедимся, что при наращивании покрытия на пластинку в формулах данной статьи нужно:

- положить $b=1$ и считать реактивные силы $P(a)$ и реактивные моменты $M(a)$ отнесенными к единице длины контура;
- заменить модули упругости E и E_n соответственно величинами $E/(1-\mu)$ и $E_n/(1-\mu_n)$, где μ , μ_n — коэффициенты Пуассона материалов пластинки и покрытия.

2. Все формулы данной статьи сохраняют силу также и в том случае, когда для определения остаточных напряжений покрытие постепенно снимается тонкими плоскими слоями.

* * *

В заключение автор благодарит Л. И. Дехтяря, С. И. Иванова, А. А. Мартыненко и М. Я. Попереки за полезную дискуссию.

ЛИТЕРАТУРА

- Дехтярь Л. И., Безносов А. Е., Андрейчук В. К. Силовой метод определения остаточных напряжений в покрытиях. Электронная обработка материалов, 1965, № 5/6.

2. Дехтярь Л. И. Определение остаточных напряжений в покрытиях и биметаллах. Кишинев, «Карта Молдовеняскэ», 1968.

3. Брежнев А. В., Мартыненко А. А. О силовом и деформационном методах определения остаточных напряжений в электролитических покрытиях. Электрохимия, 1968, вып. 12.

4. Кыо Я. П. О силовом методе определения остаточных напряжений в покрытиях. Сб. науч. тр. Эст. сельскохоз. акад., 1969, № 53.

5. Кыо Я. П. К определению остаточных напряжений в наращенных на стержни покрытиях методом замера прогиба. Сб. научн. тр. Эст. сельскохоз. акад., 1969, № 53.

6. Биргер И. А. Остаточные напряжения. М., Машгиз, 1963.

7. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник, том I. Под общей ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. М., «Машиностроение», 1968.

8. Кыо Я. Определение остаточных напряжений в покрытиях, наращенных на жестко заземленные стержни и пластинки. Материалы респ. научн. конф. по мех. и эл. сельск. хоз., посвященной 100-летию со дня рожд. В. И. Ленина. Тарту, Ротапринт ЭСХА, 1970.

9. Петров Ю. Н., Дехтярь Л. И., Нудьга В. Н. Силовой метод определения остаточных напряжений в электролитических покрытиях, полученных в ультразвуковом поле. Электрохимия, 1966, вып. 1.

10. Аверченко П. А., Трескунов Б. А., Плескач В. М. О деформационном методе определения остаточных напряжений в биметаллах. Проблемы прочности, 1970, № 5.

11. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М., Физматгиз, 1963.

VEEL KORD JÕU- JA DEFORMATSIOONIMEETODITEST JÄÄKPINGETE MÄÄRAMISEKS JÄIGALT KINNITATUD VARRASTE JA PLAATIDE KATETES

Tehnikakandidaat J. Kõo

EPA ehitusmehaanika kateedri dotsent

Kokkuvõte

Tuletatakse jõu- ja deformatsioonimeetodite arvutusvalemid jääkpingete määramiseks jäigalt kinnitatud varraste ja plaatide katetes. Vaadeldakse liikumatut ja liikuvat jäiga kinnituse juhte. Aluse ja katte elastsuskonstandid loetakse erinevateks.

NOCHMALS ÜBER DIE KRAFT- UND DEFORMATIONSMETHODEN ZUR BESTIMMUNG VON RESTSPANNUNGEN IN ÜBERZÜGEN DER EINGESPANNTEN STÄBE UND PLATTEN

Kandidat der technischen Wissenschaften J. Kõo

Dozent am Lehrstuhl für Baumechanik der Estnischen Landwirtschaftlichen Akademie

Zusammenfassung

In der Mitteilung werden die Auswertungsformeln der Kraft- und Deformationsmethoden für Bestimmung von Restspannungen in Überzügen der eingespannten Stäbe und Platten abgeleitet. Es werden sowohl die vollkommene als auch die bewegliche Einspannung betrachtet. Die Elastizitätskonstanten von Materialien der Unterlage und des Überzuges werden als ungleich angenommen.