

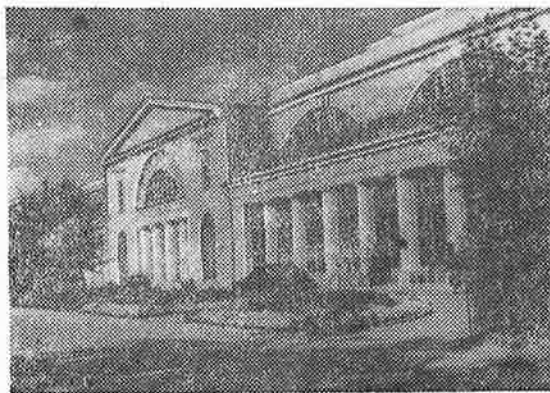
МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РСФСР

ЗАПИСКИ

ЛЕНИНГРАДСКОГО СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОГО ИНСТИТУТА

ТОМ 82

МЕХАНИЗАЦИЯ И ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА



ЛЕНИНГРАД

1961

Я. П. КЮ,

аспирант

РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В КРУГЛЫХ ЦИЛИНДРАХ С ГАЛЬВАНИЧЕСКИМ ПОКРЫТИЕМ

Представим гальваническое покрытие разделенным на элементарные объемы и предположим, что каждый элемент вследствие протекающих в нем физико-химических процессов [1], претерпевает определенную деформацию. Такую свободную деформацию будем называть собственной деформацией.

В сплошном покрытии, которое прочно сцепляется с катодом, собственная деформация не может происходить свободно, и поэтому в нем, а также в катоде, возникают собственные напряжения.

Предполагая, что собственная деформация определяется равными во всех направлениях линейными деформациями, а сдвиги отсутствуют, получим полную аналогию между собственной и температурной деформациями. Следовательно, можно уравнения термоупругости применить к задаче определения собственных напряжений.

Рассмотрим сначала решение термоупругой задачи для круглого многослойного цилиндра с радиальным перепадом температур, которое в дальнейшем используем для решения задачи о собственных напряжениях в цилиндре с гальваническим покрытием.

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛОГО МНОГОСЛОЙНОГО ЦИЛИНДРА

Рассмотрим длинный полый цилиндр, составленный из n круглых концентрических изотропных слоев (рис. 1).

Пользуясь цилиндрическими координатами r , θ , z полагаем температуру t зависящей только от радиуса r .

Для m -го слоя (рис. 1) введем следующие обозначения:

r_{m-1} , r_m — внутренний и наружный радиусы слоя; $\sigma_r^{(m)}$, $\sigma_\theta^{(m)}$, $\sigma_z^{(m)}$ — нормальные напряжения; $u_r^{(m)}$, $u_\theta^{(m)}$, $u_z^{(m)}$ — перемещения; $\varepsilon_r^{(m)}$, $\varepsilon_\theta^{(m)}$, $\varepsilon_z^{(m)}$ — линейные деформации; E_m — модуль упругости; μ_m — коэффициент Пуассона; α_m — коэффициент линейного теплового расширения.

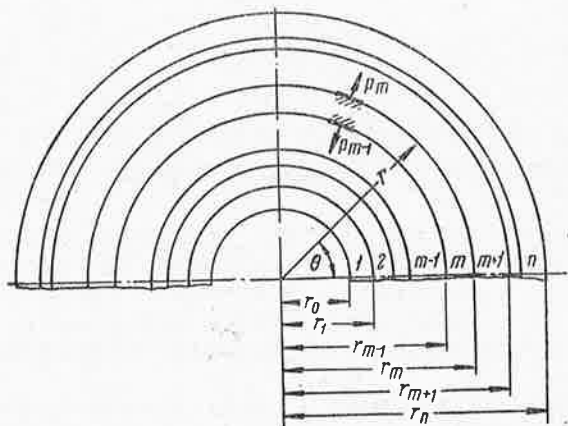


Рис. 1.

Предполагая, что слои спаяны по поверхностям контакта и пренебрегая влиянием торцов, можно считать, что нормальные сечения цилиндра остаются плоскими и работают в одинаковых условиях, так что $u_r^{(m)} = u_r^{(m)}(r)$, $u_\theta^{(m)} = 0$, $u_z^{(m)} = u_z^{(m)}(z)$, а деформации определяются формулами:

$$\varepsilon_r^{(m)} = \frac{d u_r^{(m)}}{d r}, \quad \varepsilon_\theta^{(m)} = \frac{u_r^{(m)}}{r}, \quad \varepsilon_z^{(m)} = \frac{d u_z^{(m)}}{d z} = \varepsilon_z =$$

$$= \text{const} \quad (m=1, \dots, n), \quad (1)$$

причем все сдвиги, а следовательно, и касательные напряжения равны нулю.

В этом случае слой с номером m можно рассматривать как однородный полый цилиндр с радиальным перепадом температур и действующими на внутренней и наружной поверхностях, равномерно распределенными нормальными

усилиями p_{m-1} и p_m . Напряжения и перемещения в таком цилиндре определяются по следующим формулам [2]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(m)} &= -\frac{E_m}{1-\mu_m} T_m + A_m - \frac{B_m}{r^2}, \\ \sigma_\theta^{(m)} &= \frac{E_m}{1-\mu_m} (T_m - \alpha_m t) + A_m + \frac{B_m}{r^2}, \\ \sigma_z^{(m)} &= -\frac{E_m}{1-\mu_m} \alpha_m t + 2\mu_m A_m + E_m \varepsilon_z; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$u_r^{(m)} = r \left(\frac{1+\mu_m}{1-\mu_m} T_m + \frac{C_m}{2} + \frac{D_m}{r^2} \right), \quad (3)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} T_m &= \frac{1}{r^2} \int_{r_{m-1}}^r \alpha_m t r dr, \quad A_m = \frac{E_m (C_m + 2\mu_m \varepsilon_z)}{2(1+\mu_m)(1-2\mu_m)}, \\ B_m &= \frac{E_m D_m}{1+\mu_m} \quad (m = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Определяя постоянные C_m и D_m из условий:

при $r = r_{m-1}$ $\sigma_r^{(m)} = p_{m-1}$; при $r = r_m$ $\sigma_r^{(m)} = p_m$

и внося их в (2) и (3), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r^{(m)} &= \frac{E_m}{1-\mu_m} \left(-T_m + \frac{r^2 - r_{m-1}^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} \cdot \frac{r_m^2}{r^2} T_m^* \right) + \\ &+ \frac{p_m r_m^2 - p_{m-1} r_{m-1}^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} - \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m^2 - r_{m-1}^2} \cdot \frac{r_{m-1}^2 r_m^2}{r^2}, \\ \sigma_\theta^{(m)} &= \frac{E_m}{1-\mu_m} \left(T_m + \frac{r^2 + r_{m-1}^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} \cdot \frac{r_m^2}{r^2} T_m^* - \alpha_m t \right) + \\ &+ \frac{p_m r_m^2 - p_{m-1} r_{m-1}^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} + \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m^2 - r_{m-1}^2} \cdot \frac{r_{m-1}^2 r_m^2}{r^2}, \\ \sigma_z^{(m)} &= \frac{E_m}{1-\mu_m} \left(\frac{2\mu_m r_m^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} T_m^* - \alpha_m t \right) + \\ &+ 2\mu_m \frac{p_m r_m^2 - p_{m-1} r_{m-1}^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} + E_m \varepsilon_z; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$u_r^{(m)} = r \left\{ \frac{1 + \nu_m}{1 - \nu_m} \left[T_m + \left(1 - 2\nu_m + \frac{r_{m-1}^2}{r^2} \right) \frac{r_m^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} T_m^* \right] + \right. \\ \left. + \frac{1 + \nu_m}{E_m} \left[(1 - 2\nu_m) \frac{p_m r_m^2 - p_{m-1} r_{m-1}^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} + \frac{p_m - p_{m-1}}{r_m^2 - r_{m-1}^2} \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \frac{r_{m-1}^2 r_m^2}{r^2} \right] - \nu_m \varepsilon_z \right\}, \quad (6)$$

где:

$$T_m^* = \frac{1}{r_m^2} \int_{r_{m-1}}^{r_m} \alpha_m r dr \quad (m = 1, 2, \dots, n; p_0 = p_n = 0). \quad (7)$$

Неизвестные усилия p_m и деформацию ε_z определим из условий неразрывности перемещений:

$$\text{при } r = r_m \quad u_r^{(m)} = u_r^{(m+1)} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1) \quad (8)$$

и из условия, что равнодействующая нормальных усилий в поперечных сечениях цилиндра равна нулю, т. е.

$$\sum_{m=1}^n \int_{r_{m-1}}^{r_m} \sigma_z^{(m)} r dr = 0. \quad (9)$$

Используя уравнения (5) и (6) вместо (8) и (9) получим:

$$\left. \begin{aligned} c_{m0} \varepsilon_z + c_{m1} p_{m-1} + c_{m2} p_m + c_{m3} p_{m+1} + c_{m4} &= 0 \\ (m = 1, 2, \dots, n-1; p_0 = p_n = 0), \\ c_{n0} \varepsilon_z + \sum_{m=1}^{n-1} c_{nm} p_m + c_{nn} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} c_{m0} &= \frac{\nu_m - \nu_{m+1}}{2}, & c_{m1} &= \frac{1 - \nu_m^2}{E_m} \cdot \frac{r_{m-1}^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2}, \\ c_{m2} &= \frac{1 + \nu_m}{E_m} \left[\frac{1}{2} - (1 - \nu_m) \frac{r_m^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} \right] - \\ & - \frac{1 + \nu_{m+1}}{E_{m+1}} \left[\frac{1}{2} + (1 - \nu_{m+1}) \frac{r_m^2}{r_{m+1}^2 - r_m^2} \right], \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 c_{m3} &= \frac{1 - \nu_{m+1}^2}{E_{m+1}} \cdot \frac{r_{m+1}^2}{r_{m+1}^2 - r_m^2}, \\
 c_{m4} &= (1 + \nu_{m+1}) \frac{r_{m+1}^2}{r_{m+1}^2 - r_m^2} T_{m+1}^* - \\
 &\quad - (1 + \nu_m) \frac{r_m^2}{r_m^2 - r_{m-1}^2} T_m^*, \\
 c_{n0} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n E_m (r_m^2 - r_{m-1}^2), \quad c_{nm} = (\nu_m - \nu_{m+1}) r_m^2, \\
 c_{nn} &= - \sum_{m=1}^n E_m r_m^2 T_m^*.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Решая совместно уравнения (10), определим все усилия p_m и величину ε_z , а вместе с тем и напряжения, перемещения и деформации в каждом слое.

В частности, для двухслойного цилиндра ($n = 2$) из (10) получаем:

$$p_1 = \frac{c_{14} c_{20} - c_{10} c_{22}}{c_{10} c_{21} - c_{12} c_{20}}, \quad \varepsilon_z = \frac{c_{12} c_{22} - c_{14} c_{21}}{c_{10} c_{21} - c_{12} c_{20}}. \tag{12}$$

Отметим, что полученные формулы действительны также для сплошного цилиндра ($r_0 = 0$).

СОБСТВЕННЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В КРУГЛОМ ЦИЛИНДРЕ С ГАЛЬВАНИЧЕСКИМ ПОКРЫТИЕМ

Рассмотрим полый длинный цилиндр, на наружную поверхность которого наращивается гальваническое покрытие (рис. 2).

Пусть R_0 — радиус свободной от покрытия граничной поверхности катода; R_k — радиус граничной поверхности катода, на которую наращивается покрытие; r — текущий радиус; R — переменный в процессе наращивания радиус свободной поверхности покрытия; R_n — конечный радиус свободной поверхности покрытия.

Разграничивая величины, относящиеся к покрытию и катоду соответственно индексами n и k , введем обозначения: E_n, E_k — модули упругости; ν_n, ν_k — коэффициенты Пуассона; σ_{in}, σ_{ik} — нормальные напряжения; u_{in}, u_{ik} — перемещения; $\varepsilon_{in}, \varepsilon_{ik}$ — линейные деформации; ($i = r, \theta, z$).

Процесс осаждения покрытия рассматриваем как непрерывное наращивание бесконечно тонких элементарных слоев, в каждом из коротых после наращивания протекают физико-химические процессы, причиняющие собственную деформацию.

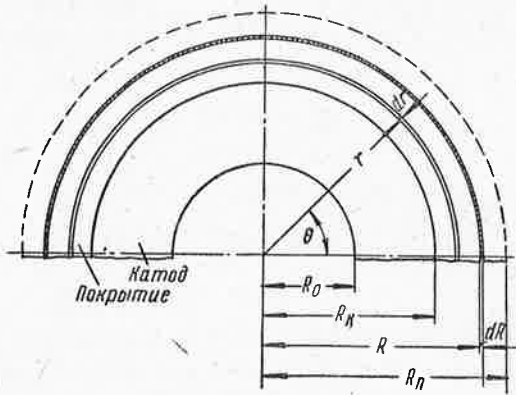


Рис. 2.

При этом допустим, что собственная деформация зависит только от радиуса R и определяется аналогично температурной деформации, составляющими:

$$\epsilon'_r = \epsilon'_\theta = \epsilon'_z = \beta(R), \quad \gamma'_{r\theta} = \gamma'_{rz} = \gamma'_{\theta z} = 0,$$

где: $\beta(R)$ — собственная линейная деформация осадка, подлежащая определению из эксперимента.

Предполагаем, что покрытие прочно сцепляется с катодом, так что составляющие перемещения можно считать непрерывными функциями координат.

Пренебрегая влиянием торцов, считаем, что поперечные сечения цилиндра остаются плоскими и работают в одинаковых условиях.

При сделанных допущениях собственное напряженное состояние рассматриваемого цилиндра будет очевидно осесимметричным.

Вычислим собственные напряжения в некотором слое покрытия с радиусом r (рис. 2).

Напряжения, действующие в слое в тот момент наращивания, когда этот слой является наружным ($R = r$), обозначим через $\sigma_{in}^0(r)$. В процессе дальнейшего наращивания ($R > r$) напряжения в рассматриваемом слое очевидно изменяются. Обозначив приращения напряжений при наращивании покрытия от $R = r$ до $R = R_n$ через $\sigma_{in}^*(r)$ находим:

$$\sigma_{in} = \sigma_{in}^0(r) + \sigma_{in}^*(r) \quad (i = r, \theta, z). \quad (13)$$

Приращения $\sigma_{in}^*(r)$ находим как определенные интегралы в пределах от r до R_n от элементарных приращений $d\sigma_{in}^*(r, R)$ при наращивании некоторого элементарного слоя с радиусом R и толщиной dR (рис. 2). Тогда вместо (13) получим:

$$\sigma_{in} = \sigma_{in}^0(r) + \int_r^{R_n} \frac{\partial \sigma_{in}^*(r, R)}{\partial R} dR \quad (i = r, \theta, z). \quad (14)$$

Элементарные приращения напряжений в некотором слое катода ($r < R_k$) при наращивании элементарного слоя, обозначим через $d\sigma_{ik}(r, R)$. Суммируя эти приращения в пределах от R_k до R_n , получим:

$$\sigma_{ik} = \int_{R_k}^{R_n} \frac{\partial \sigma_{ik}(r, R)}{\partial R} dR \quad (i = r, \theta, z). \quad (15)$$

Перемещения и деформации определяются также интегрированием соответствующих элементарных приращений.

Для радиальных перемещений u_{rk} у свободной от покрытия поверхности ($r = R_0$) и для деформации ε_{zk} соответственно получим:

$$(u_{rk})_{r=R_0} = \int_{R_k}^{R_n} \frac{\partial u_{rk}(R_0, R)}{\partial R} dR, \quad \varepsilon_{zk} = \int_{R_k}^{R_n} \frac{\partial \varepsilon_{zk}(R)}{\partial R} dR. \quad (16)$$

Аналогия между собственной и температурной деформациями позволяет при вычислении напряжений $\sigma_{in}^0(r)$ и элементарных приращений $d\sigma_{in}^*(r, R)$, $d\sigma_{ik}(r, R)$, $du_{rk}(R_0, R)$ и $d\varepsilon_{zk}(R)$ пользоваться решением осесимметричной задачи термоупругости для многослойного цилиндра. Считая в пределах наращенного элементарного слоя покрытия собственную деформацию постоянной, получаем задачу о термоупругом равновесии двухслойного цилиндра (рис. 2) со следующим распределением температур:

при $R_0 \leq r \leq R$ $t = 0$, при $R \leq r \leq R + dR$ $t = \frac{\beta(R)}{\alpha} = \text{const.}$

Решая эту задачу на основании формул (5), (6) и (12), подставляя результат в (14) — (16), и введя безразмерные координаты

$$\rho = \frac{r}{R_k}, \quad \xi = \frac{R}{R_k}, \quad (17)$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rn} &= \frac{E_n}{1-\mu_n} \int_0^{k_n} \left[\psi_0(\xi) + \frac{1}{\rho^2} \psi_2(\xi) \right] \beta(\xi) \xi d\xi, \\ \sigma_{\theta n} &= \frac{E_n}{1-\mu_n} \left\{ \int_0^{k_n} \left[\psi_0(\xi) - \frac{1}{\rho^2} \psi_2(\xi) \right] \beta(\xi) \xi d\xi - \beta(\rho) \right\}, \\ \sigma_{zn} &= \frac{E_n}{1-\mu_n} \left[2 \int_0^{k_n} \psi_4(\xi) \beta(\xi) \xi d\xi - \beta(\rho) \right]; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rk} &= 2 E_n \frac{\rho^2 - k_0^2}{\rho^2} \int_1^{k_n} \psi_6(\xi) \beta(\xi) \xi d\xi, \\ \sigma_{\theta k} &= 2 E_n \frac{\rho^2 + k_0^2}{\rho^2} \int_1^{k_n} \psi_6(\xi) \beta(\xi) \xi d\xi, \\ \sigma_{zk} &= 2 E_n \int_1^{k_n} \psi_8(\xi) \beta(\xi) \xi d\xi; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} (u_{rk})_{\rho=k_0} &= 2 \vartheta R_0 \int_1^{k_n} \psi_{10}(\xi) \beta(\xi) \xi d\xi, \\ \varepsilon_{zk} &= 2 \vartheta \int_1^{k_n} \psi_{12}(\xi) \beta(\xi) \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Здесь:

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= \frac{R_0}{R_k}, \quad k_n = \frac{R_n}{R_k}, \quad \vartheta = \frac{E_n}{E_k}, \\ \psi_j(\xi) &= \frac{b_j \xi^3 + \bar{b}_{j+1}}{a_0 \xi^4 + a_1 \xi^2 + a_2} \quad (j = 0, 2, \dots, 12), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \vartheta [2(1-\mu_k)\vartheta + (\lambda - \vartheta)(1 - k_0^2)], \\ a_1 &= (1 - k_0^2) [2(1-\mu_n + \vartheta - \mu_k\lambda)\vartheta + \\ &\quad + (\lambda - \vartheta)(1 - k_0^2)] - 4(1 - \mu_k)\vartheta^2, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 a_2 &= (1 - k_0^2) \{ (1 - k_0^2) [2(1 - \mu_n) \lambda + \vartheta - \lambda] - \\
 &\quad - \vartheta [2(1 - \mu_n) + 2(1 - \mu_\kappa) \lambda + \vartheta - \lambda] \} + \\
 &\quad + 2(1 - \mu_\kappa) \vartheta^2, \\
 b_0 &= a_0, \quad b_1 = (1 - k_0^2) [2(1 - \mu_\kappa) \vartheta \lambda + \\
 &\quad + (\lambda - \vartheta) (1 - \vartheta - k_0^2)] - 2(1 - \mu_\kappa) \vartheta^2, \\
 b_2 &= \vartheta \{ (1 - k_0^2) [2(1 - \mu_n) + \vartheta - \lambda] - 2(1 - \mu_\kappa) \vartheta \}, \\
 b_3 &= a_2, \quad b_4 = a_0, \\
 b_5 &= (1 - k_0^2) \{ \vartheta [(1 - 2\mu_\kappa) \lambda + \vartheta] + \\
 &\quad + \mu_n (\lambda - \vartheta) (1 - k_0^2) \} - 2(1 - \mu_\kappa) \vartheta^2, \quad b_6 = \vartheta, \\
 b_7 &= \lambda (1 - k_0^2) - \vartheta, \quad b_8 = \lambda (1 - k_0^2) + \vartheta (1 + k_0^2), \\
 b_9 &= \lambda (1 - k_0^2) - \vartheta (1 + k_0^2), \\
 b_{10} &= 2\vartheta - \mu_\kappa [\lambda (1 - k_0^2) + \vartheta (1 + k_0^2)], \\
 b_{11} &= (2 - \mu_\kappa) (1 - k_0^2) \lambda - \vartheta [2 - \mu_\kappa (1 + k_0^2)], \\
 b_{12} &= (\lambda - \vartheta) (1 - k_0^2) + 2(1 - \mu_\kappa) \vartheta, \\
 b_{13} &= (1 - k_0^2) [(1 - 2\mu_\kappa) \lambda + \vartheta] - 2(1 - \mu_\kappa) \vartheta,
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

причем:

$$\lambda = \frac{1 + \mu_n}{1 + \mu_\kappa}. \tag{23}$$

Выражения (18) и (19) удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям:

$$\text{при } \rho = k_n \quad \sigma_{rn} = 0, \quad \text{при } \rho = k_0 \quad \sigma_{rk} = 0.$$

При этом выражения (19) для напряжений σ_{ik} удовлетворяют также обычным уравнениям совместности в напряжениях.

Уравнения совместности деформаций в покрытии, выраженные через напряжения σ_{in} , принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta \sigma_{rn} + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{d\sigma_{rn}}{d\rho} + \frac{1}{1 + \mu_n} \cdot \frac{d^2 \Sigma}{d\rho^2} &= - \frac{E_n}{1 - \mu_n} \left\{ \frac{1}{\rho^3} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \frac{d}{d\rho} (\rho^4 \psi_0^*) + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\psi_2^*}{d\rho} + \frac{2}{1 + \mu_n} \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{d}{d\rho} \left[\rho (\psi_0^{*i} + \psi_4^*) + \frac{d\beta(\rho)}{d\rho} \right] \right\}, \\
 \Delta \sigma_{\theta n} - \frac{2}{\rho} \cdot \frac{d\sigma_{rn}}{d\rho} + \frac{1}{1 + \mu_n} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\Sigma}{d\rho} &= \\
 &= - \frac{E_n}{1 - \mu_n} \left\{ \rho \frac{d\psi_0^*}{d\rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\psi_2^*}{d\rho} + \Delta\beta(\rho) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{1 + \mu_n} \left[\psi_0^* + \psi_4^* + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\beta(\rho)}{d\rho} \right] \right\},
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

$$\Delta \sigma_{zn} = -\frac{E_n}{1-\mu_n} \left[\Delta \beta(\rho) + \frac{2}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} (\rho^2 \psi_4^*) \right], \quad (24)$$

где:

$$\left. \begin{aligned} \psi_j^* &= \psi_j(\rho) \beta(\rho) \quad (j = 0, 2, 4), \\ \Sigma &= \sigma_{rn} + \sigma_{\theta n} + \sigma_{zn}, \quad \Delta = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

В отличие от обычных уравнений совместности в выражениях (24) имеются правые части, зависящие от подинтегральных функций в формулах (18). Это объясняется тем, что рассматриваемое напряженное состояние складывается постепенно в процессе формирования тела, а не после окончания этого процесса, как это обычно предполагается.

Собственная линейная деформация осадка $\beta(\xi)$, входящая в формулы (18) — (20), должна быть определена из эксперимента.

Приводим формулы для определения функции $\beta(\xi)$ на основании данных измерения деформаций полого цилиндрического катода. Учитывая, что $du_{rk}(k_0\xi) = d\varepsilon_{\theta k}(k_0\xi)R_0$ на основании (20) получим:

$$\beta(\xi) = \frac{1}{2\vartheta \psi_{10}(\xi)\xi} \cdot \frac{d\varepsilon_{\theta k}(k_0, \xi)}{d\xi} \quad \text{или} \quad \beta(\xi) = \frac{1}{2\vartheta \psi_{12}(\xi)\xi} \cdot \frac{d\varepsilon_{zk}(\xi)}{d\xi}. \quad (26)$$

Вид функции $\varepsilon_{\theta k}(k_0, \xi)$ или $\varepsilon_{zk}(\xi)$ определяется экспериментально, например с помощью датчиков сопротивления.

Приводим выражения функций $\psi_i(\xi)$ для двух практически важных частных случаев.

$$1. \quad \lambda \leq 1 (\mu_n = \mu_k = \mu).$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(\xi) &= \frac{c_0}{c_0 \xi^2 + c_1}, \quad \psi_2(\xi) = \frac{c_1}{c_0} \psi_0(\xi), \\ \psi_4(\xi) &= \mu \psi_0(\xi) + \frac{(1-\mu)\vartheta}{\vartheta \xi^2 + c_2}, \\ \psi_6(\xi) &= \frac{1}{c_0} \psi_0(\xi), \quad \psi_8(\xi) = \frac{2\mu}{c_0} \psi_0(\xi) + \frac{1}{\vartheta \xi^2 + c_2}, \\ \psi_{10}(\xi) &= \frac{2(1-\mu^2)}{c_0} \psi_0(\xi) - \frac{\mu}{\vartheta \xi^2 + c_2}, \quad \psi_{12}(\xi) = \frac{1}{\vartheta \xi^2 + c_2}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 + (1 - 2\mu)\vartheta - (1 - \vartheta)k_0^2, \quad c_1 = (1 - 2\mu)(1 - \vartheta) - \\ &\quad - (1 - 2\mu + \vartheta)k_0^2, \quad c_2 = 1 - \vartheta - k_0^2. \end{aligned} \quad (28)$$

$$2. \vartheta = \lambda = 1 \quad (E_n = E_\kappa = E, \nu_n = \nu_\kappa = \nu).$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_0(\xi) &= \frac{1}{\xi^2 - k_0^2}, \quad \psi_2(\xi) = -k_0^2 \psi_0(\xi), \quad \psi_4(\xi) = \psi_0(\xi), \\ \psi_6(\xi) &= \frac{1}{2(1-\mu)} \psi_0(\xi), \quad \psi_8(\xi) = \frac{1}{1-\mu} \psi_0(\xi), \\ \psi_{10}(\xi) &= \psi_{12}(\xi) = \psi_0(\xi). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

В качестве примера рассмотрим частный случай, когда $\vartheta = \lambda = 1$ ($E_n = E_\kappa = E, \nu_n = \nu_\kappa = \nu$), а $\beta = \beta_0 = \text{const.}$

Подставляя выражения (29) в (18) — (20), и произведя вычисления, получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rn} &= -\sigma_n^\circ \frac{\rho^2 - k_0^2}{2\rho^2} \ln \frac{k_n^2 - k_0^2}{\rho^2 - k_0^2}, \\ \sigma_{r\kappa} &= -\sigma_n^\circ \frac{\rho^2 - k_0^2}{2\rho^2} \ln k^*, \\ \sigma_{\theta n} &= \sigma_n^\circ \left(1 - \frac{\rho^2 + k_0^2}{2\rho^2} \ln \frac{k_n^2 - k_0^2}{\rho^2 - k_0^2} \right), \\ \sigma_{\theta\kappa} &= -\sigma_n^\circ \frac{\rho^2 + k_0^2}{2\rho^2} \ln k^*, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$$\sigma_{zn} = \sigma_n^\circ \left(1 - \ln \frac{k_n^2 - k_0^2}{\rho^2 - k_0^2} \right), \quad \sigma_{z\kappa} = -\sigma_n^\circ \ln k^*;$$

$$(u_{r\kappa})_\rho = k_0 = \beta_0 R_0 \ln k^*, \quad \epsilon_{z\kappa} = \beta_0 \ln k^*, \quad (31)$$

где:

$$\sigma_n^\circ = -\frac{E\beta_0}{1-\mu}, \quad k^* = \frac{k_n^2 - k_0^2}{1 - k_0^2}. \quad (32)$$

На рис. 3 приведены графики распределения напряжений (30) при $\sigma_n^0 > 0$ ($\beta_0 < 0$), $k_0 = 0,5$, $k_n = 1,2$.

Отметим, что все полученные выше формулы для полого цилиндра с наружным покрытием ($k_0 < 1$, $k_n > 1$, $d\xi > 0$) применимы также к сплошным цилиндрам ($k_0 = 0$, $k_n > 1$, $d\xi > 0$) и к полым цилиндрам с внутренним покрытием ($k_0 > 1$, $k_n < 1$, $d\xi < 0$).

Следует также оговорить, что указанные формулы применимы только к цилиндрам достаточно длинным (с отношением длины к наружному диаметру большим 3), и дают при

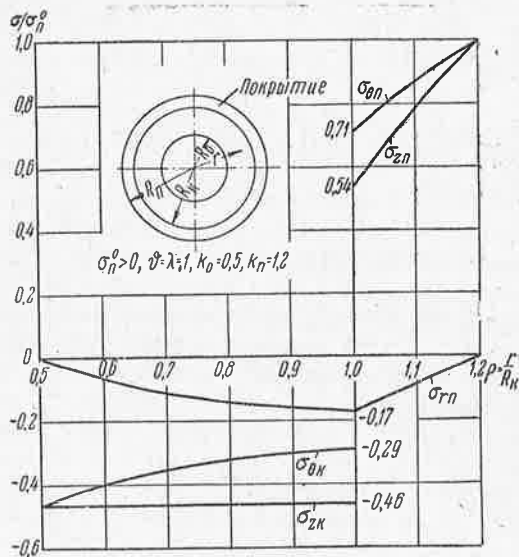


Рис. 3

этом достоверные результаты для сечений, достаточно удаленных от концов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Т. Ваграмян и З. А. Соловьева. Методы исследования процессов электроосаждения металлов. Изд-во АН СССР, 1955.
2. А. М. Кац. Теория упругости. ГИТТЛ, 1956.