

**СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ
ЭСТОНСКОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ПОКРЫТИЙ
ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ДЕТАЛЕЙ МАШИН**

114

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ПЛАСТИНКАХ, ЦИЛИНДРАХ И СФЕРАХ С ПОКРЫТИЯМИ

А. П. К ю о

Кафедра строительной механики

Часто коэффициенты линейного температурного расширения материалов подложки (детали) и покрытия неодинаковы. Тогда при изменении температуры в подложке и в покрытии возникают температурные напряжения. Ниже приводятся формулы для определения термоупругих напряжений в пластинках, цилиндрах и сферах с покрытиями при равномерном изменении температуры. Приводимые результаты получены при помощи методов определения термоупругих напряжений в многослойных пластинках [1, 2], цилиндрах [3] и сферах [4].

Обозначения: $i=1, 2$ - индекс характеристик подложки ($i=1$) и покрытия ($i=2$); h_i - толщина; z - координата, отсчитываемая от покрытой поверхности подложки в сторону покрытия; $k=h_2/h_1$ - отношение толщин; $\eta=z/h_1$ - безразмерная координата; r_0, r_1 - внутренний и внешний радиусы цилиндра или сферы; r_2 - наружный радиус покрытия цилиндра или сферы; $\rho = r/r_1$ - безразмерный радиус; $k_0=r_0/r_1$, $k_2=r_2/r_1$ - отношения радиусов; E_i - модуль упругости; μ_i - коэффициент Пуассона; $\beta = E_2/E_1$ - отношение модулей упругости; α_i - коэффициент линейного температурного расширения материала; Δt - изменение температуры.

1. Пластинки с покрытиями

Рассматриваются пластинки произвольной формы в плане с односторонним покрытием. Начало прямоугольных координат x, y, z поместим в произвольную точку плоскости контакта пластинки и покрытия, оси x и y совместим с этой плоскостью, а ось z направим в сторону покрытия (рис. 1, 2).

Рассмотрим различные случаи закрепления контура пластинки. Во всех случаях возникают в пластинке ($i=1$) и в покрытии ($i=2$) напряжения $\sigma_{xi} = \sigma_{yi} = \sigma_i$. Остальные составляющие напряжения равны нулю.

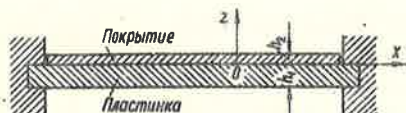


Рис. 1. Жестко заземленная пластинка с покрытием.

Контур жестко (неподвижно) заземлен (рис. 1) Перемещения и деформации отсутствуют. Температурные напряжения в пластинке

$$\sigma_1 = -E_1^* \alpha_1 \Delta t, \quad (1)$$

в покрытии

$$\sigma_2 = -E_2^* \alpha_2 \Delta t. \quad (2)$$

Здесь и далее используется обозначение

$$E_i^* = E_i / (1 - \mu_i) \quad (i = 1, 2).$$

Контур свободно (подвижно) заземлен (рис. 2). Пластика деформируется, оставаясь плоской. Напряжения в пластинке и в покрытии выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= E_2^* (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t k / (vk + 1), \\ \sigma_2 &= -E_2^* (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t / (vk + 1), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$v = E_2^* / E_1^*.$$

Зависимости (3) справедливы на расстоянии большем $h_1 + h_2$ от края.

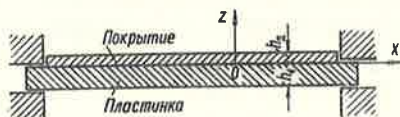


Рис. 2. Свободно заземленная пластинка с покрытием.

Контур свободен. Плоскость свободной пластинки переходит в сферическую поверхность кривизной

$$\rho c = \frac{5\nu k(k+1)(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t}{h_2 [\nu k(\nu k^3 + 4k^2 + 6k + 4) + 1]} \quad (4)$$

Температурные напряжения в пластинке и в покрытии:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= -E_2^*(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t k \frac{\nu k^3 + 3k + 6(k+1)\eta + 4}{\nu k(\nu k^3 + 4k^2 + 6k + 4) + 1} \\ \sigma_2 &= E_2^*(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t \frac{\nu k[4k^2 + 3k - 6(k+1)\eta] + 1}{\nu k(\nu k^3 + 4k^2 + 6k + 4) + 1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Из этих формул вытекает, что температурные напряжения изменяются по толщине пластинки и покрытия по линейному закону. Наибольшие напряжения в пластинке

$$\sigma_{1max} = -E_2^*(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t \frac{k(\nu k^3 + 3k + 4)}{\nu k(\nu k^3 + 4k^2 + 6k + 4) + 1} \quad (6)$$

и в покрытии

$$\sigma_{2max} = E_2^*(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t \frac{\nu k^2(4k + 3) + 1}{\nu k(\nu k^3 + 4k^2 + 6k + 4) + 1} \quad (7)$$

возникают у поверхности контакта пластинки и покрытия ($\eta=0$).

Эпюры температурных напряжений при $(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t > 0$ и $\nu k^2(2k + 3) < 1$ показаны на рис. 3.

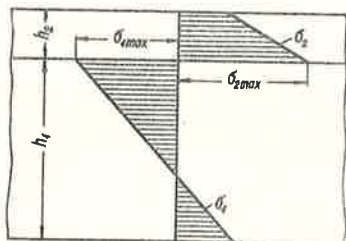


Рис. 3. Распределение температурных напряжений в свободной пластинке с покрытием.

При малых значениях параметра k можно в формулах (5) членами, содержащими k в степени два и больше пренебречь. Тогда получим для температурных напряжений следующие приближенные формулы:

$$\sigma_1 = -E_2^*(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t k(\delta\eta + 4)/(4\nu k + 1); \quad (8)$$

$$\sigma_2 = E_2^*(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t/(4\nu k + 1). \quad (9)$$

Положив в равенстве (8) $\eta = 0$, получим для максимального температурного напряжения в пластинке формулу

$$\sigma_{1, \max} = -4E_2^*(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t k/(4\nu k + 1). \quad (10)$$

Погрешность формул (8) - (10) не превышает 4%, если $\nu \leq 2$ и $\nu k \leq 0,1$.

Следует учесть, что формулы (5) - (10) справедливы вне зоны краевого эффекта шириной примерно $h_1 + h_2$.

Заметим, что при $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ выражение (4) переходит в известную формулу Тимошенко, который впервые исследовал изгиб равномерно нагретой биметаллической пластинки [5].

2. Цилиндры с покрытиями

Рассматривается длинный круглый полый цилиндр с покрытием (рис. 4), отнесенный в полярные координаты r, θ, z . Достаточно далеко от концов температурные напряжения в цилиндре

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1} \\ \sigma_{\theta 1} \end{aligned} \right\} = \frac{\rho}{1 - k_0^2} \left(1 \mp \frac{k_0^2}{\varrho^2} \right), \quad (II)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z1} = E_1(\varepsilon_2 - \alpha_1 \Delta t) + \\ + 2\mu_1 \rho / (1 - k_0^2), \end{aligned} \right\}$$

в покрытии

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r2} \\ \sigma_{\theta 2} \end{aligned} \right\} = \frac{\rho}{k_2^2 - 1} \left(1 \mp \frac{k_2^2}{\varrho^2} \right), \quad (I2)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{z2} = E_2(\varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta t) - \\ - 2\mu_2 \rho / (k_2^2 - 1). \end{aligned} \right\}$$

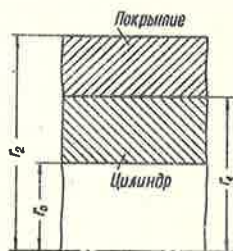


Рис. 4. Полый цилиндр с покрытием.

Величины ρ , ε_z в выражениях (II) и (I2) определяют по формулам

$$\rho = (C_{14} C_{20} - C_{10} C_{22}) / (C_{10} C_{21} - C_{12} C_{20}),$$

$$\varepsilon_z = (C_{12} C_{22} - C_{14} C_{21}) / (C_{10} C_{21} - C_{12} C_{20}),$$

где

$$C_{14} = [\alpha_2 (1 + \mu_2) - \alpha_1 (1 + \mu_1)] \Delta t / 2,$$

$$C_{20} = [E_1 (1 - k_0^2) + E_2 (k_2^2 - 1)] / 2,$$

$$C_{10} = (\mu_1 - \mu_2) / 2,$$

$$C_{22} = -[E_1 \alpha_1 (1 - k_0^2) + E_2 \alpha_2 (k_2^2 - 1)] \Delta t / 2,$$

$$C_{21} = \mu_1 - \mu_2,$$

$$C_{12} = \frac{1 + \mu_1}{E_1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1 - \mu_1}{1 - k_0^2} \right) - \frac{1 + \mu_2}{E_2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \mu_2}{k_2^2 - 1} \right).$$

Для частного случая, когда коэффициенты Пуассона материалов цилиндра и покрытия равны ($\mu_1 = \mu_2 = \mu$), имеем

$$\rho = \frac{E_2 (\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t}{\mathcal{B} (1 - 2\mu + k_0^2) / (1 - k_0^2) + (1 - 2\mu + k_2^2) / (k_2^2 - 1)},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\alpha_1 (1 - k_0^2) + \mathcal{B} \alpha_2 (k_2^2 - 1)}{1 - k_0^2 + \mathcal{B} (k_2^2 - 1)} \Delta t.$$

Если цилиндр сплошной, то в приведенных формулах полагают $k_0 = 0$.

В качестве примера на рис. 5 показано распределение безразмерных температурных напряжений в полем цилиндре с покрытием.

Для тонкостенного цилиндра с покрытием приведенные формулы неудобны, так как приходится иметь дело с малыми разностями близких к единице чисел. Для преобразования формул применительно к тонкостенным цилиндрам представим безразмерные величины ϱ , k_0 и k_2 в виде

$$\varrho = 1 + z/r_1, \quad k_0 = 1 - h_1/r_1, \quad k_2 = 1 + h_2/r_1.$$

В случае тонкостенного цилиндра величины z/r_1 , h_1/r_1 и h_2/r_1 малы по сравнению с единицей. Поэтому можно при подстановке величин ϱ , k_0 и k_2 в равенства (II) и (I2) членами, со-

держкими отношения z/r_1 , h_1/r_1 , h_2/r_1 в степени два и больше, пренебрегать. Тогда для тонкостенного цилиндра формулы (II) и (I2) переходят в следующие:

$$\sigma_{r1} = E_2^*(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t k(h_1/r_1)(\eta + 1)/(\nu k + 1); \quad (I3)$$

$$\sigma_{\theta1} = \sigma_{z1} = E_2^*(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t k/(\nu k + 1); \quad (I4)$$

$$\sigma_{r2} = E_2^*(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t (h_1/r_1)(k - \eta)/(\nu k + 1); \quad (I5)$$

$$\sigma_{\theta2} = \sigma_{z2} = -E_2^*(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta t/(\nu k + 1). \quad (I6)$$

В тонкостенном цилиндре радиальные напряжения, как видим, малы по сравнению с окружными и продольными. Окружные и продольные напряжения имеют такую же величину, как напряжения в пластинке со свободно защемленным контуром [см. формулы (3)]

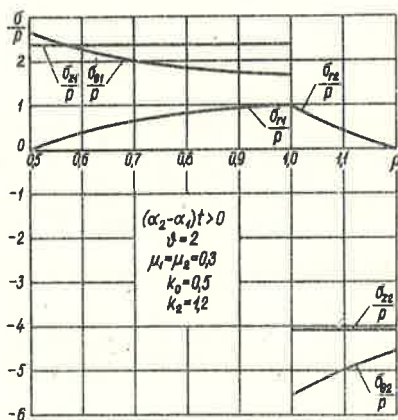


Рис. 5. Эпюры безразмерных температурных напряжений в поле цилиндра с покрытием.

3. Сферы с покрытиями

Полая сфера с покрытием (рис. 6) отнесена к полярной системе координат r, φ, θ . Температурные напряжения в сфере

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{\varrho^3 - k_0^3}{1 - k_0^3} \frac{\rho}{\varrho^3}, \\ \sigma_{\varphi1} = \sigma_{\theta1} &= \frac{2\varrho^3 + k_0^3}{1 - k_0^3} \frac{\rho}{2\varrho^3} \end{aligned} \right\} \text{(I7)}$$

в покрытии

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r2} &= \frac{k_2^3 - \varrho^3}{k_2^3 - 1} \frac{\rho}{\varrho^3}, \\ \sigma_{\varphi2} = \sigma_{\theta2} &= -\frac{2\varrho^3 + k_2^3}{k_2^3 - 1} \frac{\rho}{2\varrho^3} \end{aligned} \right\} \text{(I8)}$$

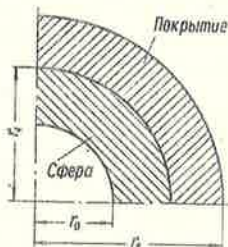


Рис. 6. Полая сфера с покрытием.

Величину ρ вычисляют по формуле

$$\rho = \frac{2E_1(\alpha_2 - \alpha_1) \Delta t}{\frac{[2(1 - 2\mu_1) + (1 + \mu_1)k_0^3]}{(1 - k_0^3)} + \vartheta \frac{[2(1 - 2\mu_2) + (1 + \mu_2)k_2^3]}{(k_2^3 - 1)}}$$

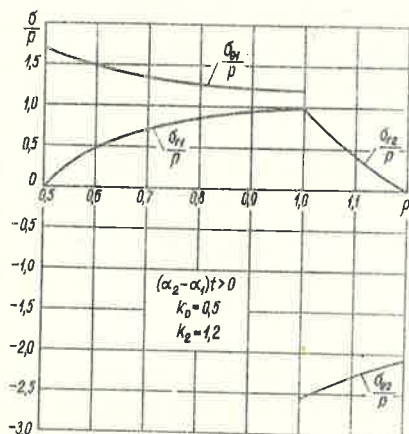


Рис. 7. Эпюры безразмерных температурных напряжений в сфере с покрытием.

Распределение безразмерных температурных напряжений в сфере с покрытием приведено на рис. 7.

Заметим, что указанные формулы применимы и для сплошных сфер ($k_0=0$).

В случае тонкостенной сферы окружные температурные напряжения в сфере и в покрытии имеют такую же величину как в цилиндре [см. формулы (14), (16)], радиальные напряжения превышают два раза соответствующие напряжения в тонкостенном цилиндре по формулам (13) и (15).

Л и т е р а т у р а

1. Кыо Я. Термоупругие напряжения в многослойных пластинках при переменном по толщине нагреве. - "Сб. науч. тр. Эст. с.-х. акад.", № II, 1959, с. 135...150.
2. Лобкова Н. А., Ильин Л. А. К теории тонких неоднородных пластин. - "Прикладная механика", 1965, т. I, вып. 8, с. 30...39.
3. Кыо Я. П. Расчет собственных напряжений в круглых цилиндрах с гальваническим покрытием. - "Зап. Ленинград. с.-х. инст.", т. 82, 1961, с. 179...190.
4. Кыо Я. П. Расчет собственных напряжений в гальванически наращенных сферах. - "Зап. Ленинград. с.-х. инст.", т. 89, 1962, с. 114...127.
5. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек. Расчет биметаллических термостатов. Избр. работы под ред. Э. И. Григолюка. М., "Наука", 1971, с. 534...552.

CONTRAINTES THERMIQUES DANS DES PLAQUES, CYLINDRES ET SPHÈRES À REVÊTEMENTS

Par J. Кыо

Chaire de mécanique des constructions

R é s u m é

On présente dans ce travail les formules pour déterminer des contraintes thermoélastiques provoquées par la variation de température dans des plaques encastrees et libres, dans des cylindres longues et dans des sphères à revêtements.