

EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA  
ЭСТОНСКАЯ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ

**EESTI PÕLLUMAJANDUSE AKADEEMIA  
TEADUSLIKE TÖÖDE KOGUMIK**

**PÕLLUMAJANDUSE MEHHAANISEERIMINE JA  
ELEKTRIFITSEERIMINE**

**СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ  
ЭСТОНСКОЙ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОЙ АКАДЕМИИ**

**МЕХАНИЗАЦИЯ И ЭЛЕКТРИФИКАЦИЯ  
СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА**

**83**

TARTU 1974

## КРАЕВОЙ ЭФФЕКТ ПРИ НАРАЩИВАНИИ ПОКРЫТИЯ НА ТОНКОСТЕННУЮ ТРУБУ СО СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ

Я. П. Кыо

Кафедра строительной механики

Определение остаточных (собственных) напряжений в покрытиях методом деформации тонкостенной трубы [1, 2]\* предполагает применение труб такой длины, чтобы на среднем участке, где замеряют деформации, можно было пренебречь влиянием краевого эффекта. В связи с этим возникает задача об оценке длины зоны распространения краевого эффекта остаточного напряженно-деформированного состояния при наращивании покрытия на тонкостенную трубу. Ниже дается приближенное решение этой задачи для трубы со свободными краями.

Для определения длины зоны распространения краевого эффекта исследуем радиальное перемещение в краевой зоне. При этом будем предполагать, что постоянные упругости материалов трубы и покрытия одинаковы.

В результате наращивания элементарного слоя покрытия на расстоянии  $h$  от наружной поверхности трубы возникают в достаточно удаленных от краев поперечных сечениях напряжения, распределенные следующим образом [1, 3]. В самом элементарном слое толщиной  $dh$  действуют начальные напряжения  $\sigma_0$ . В стенке трубы толщиной  $h_1$  и в слое покрытия толщиной  $h$  имеются равномерно распределенные осевые напряжения  $d\sigma_z$ , обратные по направлению напряжениям  $\sigma_0$ .

Если на торцовых поверхностях трубы приложить такие же напряжения (рис. 1, а), то краевой эффект исключается. Однако при свободных краях торцовые поверхности свободны от напряжений. Поэтому для определения радиального перемещения  $u_k$  в краевой зоне мы должны наложить на перемеще-

---

\* В работах [1, 2] метод разработан применительно к определению остаточных напряжений в гальванических покрытиях, однако он применим и для других покрытий, если только процессы формирования покрытия и образования остаточного напряженного состояния могут быть схематизированы подобно гальваническим покрытиям [3].

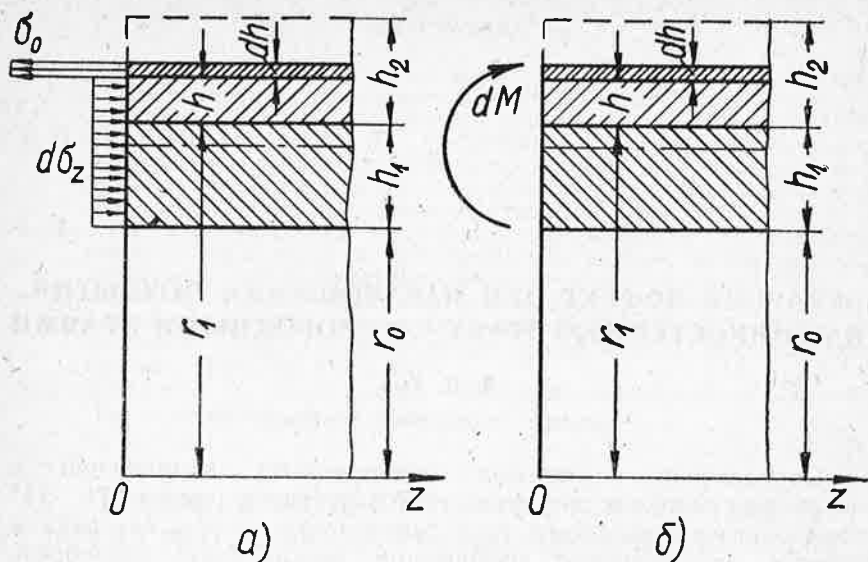


Рис. 1.

ние  $u$ , определяемое без учета краевого эффекта, дополнительное перемещение  $u_d$ , возникающее от нагрузки, равной и обратной по направлению нагрузке, показанной на рис. 1, а. При тонких стенках эту нагрузку можно привести к равномерно распределенным по краю трубы моментам  $dM$  (рис. 1, б).

С точностью до бесконечно малых второго порядка можно написать

$$dM = \sigma_0 \frac{h_1 + h}{2} dh.$$

Введя безразмерную текущую толщину покрытия  $\zeta = h/h_1$  и предполагая, что начальное напряжение в поверхностном слое изменяется по дробно-линейной зависимости [1, 2]

$$\sigma_0 = \sigma_0(0) \frac{1 + \zeta}{1 + c\zeta},$$

получим

$$dM = \sigma_0(0) h_1^2 \frac{(1 + \zeta)^2}{2(1 + c\zeta)} d\zeta,$$

где  $\sigma_0(0)$  — значение начального напряжения при  $\zeta = 0$ ;  
 $c$  — безразмерный параметр.

Приращение радиального перемещения  $du_d$ , возникающего под действием моментов  $dM$ , определяется при помощи известного решения для длинной цилиндрической оболочки со свободным краем, который нагружен равномерно распределенными моментами [4]. Обозначив расстояние от края оболочки через  $z$ , имеем

$$du_d = \frac{dM}{2\beta^2 D} e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z). \quad (1)$$

Здесь

$$\beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{r_1(h_1+h)}},$$

$$D = \frac{E(h_1+h)^3}{12(1-\mu^2)},$$

где  $r_1$  — внешний радиус трубы;

$E$  — модуль упругости;

$\mu$  — коэффициент Пуассона.

При вычислении параметра  $\beta$  радиус срединной поверхности заменен радиусом поверхности контакта трубы и покрытия  $r_1$ . Нетрудно убедиться, что в случае тонкостенной трубы погрешность, возникающая от такой замены, незначительна.

Подставляя значения  $dM$ ,  $\beta$  и  $D$  в выражение (1) и интегрируя, находим

$$u_d = r_1 \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{\sigma_0(0)}{E} \int_0^k \frac{e^{-\beta z}}{1+c\zeta} (\cos \beta z - \sin \beta z) d\zeta, \quad (2)$$

где  $k = h_2/h_1$ , причем  $h_2$  обозначает толщину покрытия.

Интеграл, входящий в равенство (2) не выражается через элементарные функции. Однако для приближенной оценки длины зоны распространения краевого эффекта можно пользоваться известной теоремой о среднем значении интеграла.

Так как функция  $1/(1+c\zeta)$  сохраняет знак в промежутке  $(0, k)$ , а функция  $e^{-\beta z} (\cos \beta z - \sin \beta z)$  непрерывна, то согласно теореме о среднем можно выражение (2) представить в виде

$$u_d = r_1 \sqrt[4]{3(1-\mu^2)} \frac{\sigma_0(0)}{E} e^{-\beta^* z} (\cos \beta^* z - \sin \beta^* z) \int_0^k \frac{d\zeta}{1+c\zeta}. \quad (3)$$

Здесь

$$\beta^* = \frac{\sqrt[4]{3(1-\mu^2)}}{\sqrt{r_1 h_1 (1+\zeta^*)}},$$

где  $\zeta^*$  — некоторое значение переменной  $\zeta$ , принадлежащее промежутку  $(0, k)$ .

Вычисляя интеграл в равенстве (3), находим дополнительное перемещение от краевой нагрузки

$$u_k = r_1 \sqrt{3(1-\mu^2)} \frac{\sigma_0(0)}{cE} \ln(1+c\zeta) e^{-\beta^*z} (\cos \beta^*z - \sin \beta^*z). \quad (4)$$

Используя приведенное в работах [1, 2] выражение деформации, находим радиальное перемещение без учета краевого эффекта

$$u = -r_1(1-\mu) \frac{\sigma_0(0)}{cE} \ln(1+c\zeta). \quad (5)$$

Складывая выражения (4) и (5), определим радиальное перемещение в краевой зоне

$$u_k = u \left[ 1 - \frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{1-\mu} e^{-\beta^*z} (\cos \beta^*z - \sin \beta^*z) \right]. \quad (6)$$

График безразмерного перемещения  $u_k/u$  при  $\mu = 0,3$  показан на рис. 2. Из графика видно, что при достаточно большом значении  $z$  отношение  $u_k/u$  становится равным единице. Это значит, что достаточно далеко от торцов радиальное перемещение можно определить без учета краевого эффекта, т. е. по формуле (5).

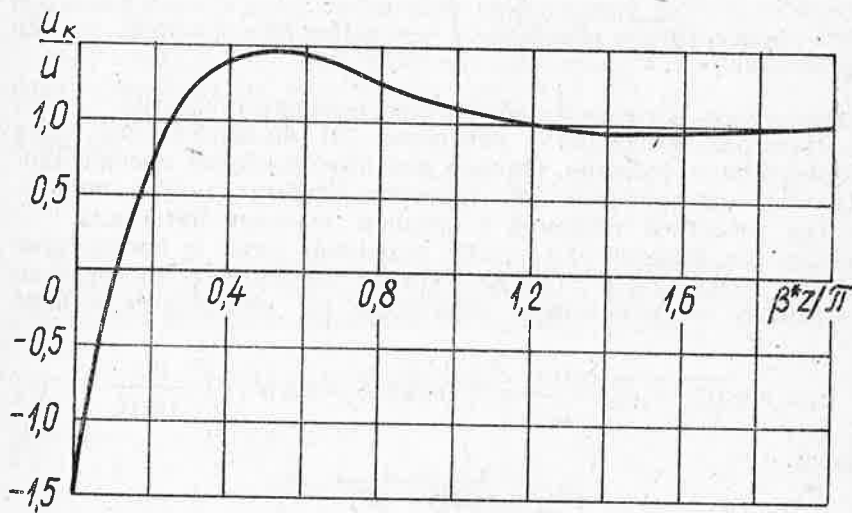


Рис. 2.

На основании выражения (6) можно определить длину зоны влияния краевого эффекта. Если довольствоваться точностью в пределах 5%, то можно сказать, что влиянием краевого эффекта можно пренебречь начиная с такого значения  $z$ , при котором постоянно выполняется условие

$$\frac{\sqrt{3(1-\mu^2)}}{1-\mu} e^{-\beta^* z} |\cos \beta^* z - \sin \beta^* z| < 0,05.$$

Так как  $|\cos \beta^* z - \sin \beta^* z| \leq \sqrt{2}$ , то

$$e^{-\beta^* z} < \frac{1-\mu}{20\sqrt{6}(1-\mu^2)},$$

откуда, учитывая выражение для  $\beta^*$  и принимая  $\zeta^* = k$ , получим условие  $z > z_k$ , где величина

$$z_k = \frac{\sqrt{r_1 h_1 (1+k)}}{\sqrt{3(1-\mu^2)}} \ln \frac{20\sqrt{6}(1-\mu^2)}{1-\mu} \quad (7)$$

представляет собой длину зоны распространения краевого эффекта.

Для исключения влияния краевого эффекта в средней части трубы, где при определении остаточных напряжений замеряют деформацию, общая длина трубы должна выбираться согласно условию  $l > 2z_k$ .

При  $\mu = 0,3$ , вычислив  $z_k$  по выражению (7); приходим к условию

$$l > 6,6 \sqrt{r_1 h_1 (1+k)},$$

которое было без вывода указано в работе [1].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кыо Я. П. Определение собственных напряжений в гальванических покрытиях по деформации тонкостенного трубчатого катода. Сб. научн. тр. Эст. сельскохозяйств. акад., 1963, № 31.
2. Кыо Я. Исследование собственных напряжений в железных гальванических покрытиях методом деформации тонкостенного трубчатого катода. Сб. научн. тр. Эст. сельскохозяйств. акад., 1969, № 61.
3. Кыо Я. П. Собственные напряжения в тонких гальванических покрытиях. Сб. научн. тр. Эст. сельскохозяйств. акад., 1963, № 31.
4. Биргер И. А. и др. Расчет на прочность деталей машин. «Машиностроение», 1966.

# DER RANDEFFEKT BEIM AUFTRAGEN DER ÜBERZÜGE AUF DAS DÜNNWANDIGE ROHR MIT FREIEN RÄNDERN

J. Kōo

Lehrstuhl für Baumechanik

Zusammenfassung

In der Mitteilung wird das Problem des Randeffekts von Eigenspannungs- und Dehnungszustand beim Auftragen des Überzuges auf das lange dünnwandige Rohr mit freien Rändern behandelt. Die Elastizitätskonstanten von Materialien des Rohres und des Überzuges werden als gleich angenommen. Für die Berechnung der Länge der Verbreitzungszone des Randeffekts wird die Formel (7) vorgeschlagen. In dieser Formel wird mit  $r_1$  der äußere Radius des Rohres, mit  $h_1$  die Wanddicke des Rohres, mit  $h_2$  die Dicke des Überzuges, mit  $k$  das Bezug  $h_2/h_1$  und mit  $\mu$  die Poissonsche Zahl bezeichnet.