— 6. Internationale Konferenz

Experimentelle Spannungsanalyse

— 6 th International Conference on

Experimental Stress Analysis

— 6 ième Congrès International

De l'Analyse des Contraintes Expérimentales

PREPRINTS

München 18. — 22. September 1978

Sur la détermination des contraintes résiduelles dans les cylindres creux non-homogènes

J. Kõo, USSR

Summary

A theory is presented for determining residual stresses in non-homogeneous hollow cylinders by measuring deformations of the inside surface of the cylinders when material is added or removed from the outer surface. The solution of the problem is based upon regarding the non-homogeneous cylinder as a piece-wise homogeneous one and on the subsequent application of the Lamé formulas to those homogeneous layers.

Three particular cases are examined: a cylinder with an unchangeable Poisson ratio, a homogeneous cylinder and a thin-walled two-layered cylinder. As an example the determination of residual stresses in a electrodeposit iron layer on a thin-walled copper cylinder is given.

Zusammenfassung

Es wird die Theorie der Methode zur Bestimmung von Eigenspannungen in dem inhomogenen Hohlzylinder nach den auf der Vorderfläche gemessenen Dehnungen vorgestellt, die beim Auftragen des Materials auf die Außenfläche oder bei der Abnahme des Materials von dieser Fläche festgestellt wurden. Die Lösung des Problems basiert auf dem Austausch der inhomogenen Zylinder gegen den stückweise homogenen Zylinder und auf der folgenden Verwendung der Formeln von Lamé für die homogenen Schichten.

Es werden drei Spezialfälle betrachtet: Zylinder mit der unveränderlichen Poissonsche Zahl, homogene Zylinder und dünnwandiger zweischichtiger Zylinder. Als Beispiel der Anwendung des Verfahrens sind die Ergebnisse der Bestimmung von Eigenspannungen im galvanischen Eisenüberzug eines dünnwandigen Kupferzylinders gegeben.

Résumé

On expose la théorie d'une méthode pour la détermination des contraintes résiduelles dans un cylindre creux non-homogène à partir des déformations mesurées sur la surface intérieure lorsqu'on applique le matériau sur la surface extérieure ou lorsqu'on enlève le matériau de cette surface. La solution du problème est basée sur le remplacement d'un cylindre non-homogène par un cylindre homogène par morceaux et sur l'application suivante des formules de Lamé pour les couches homogènes.
Trois cas particuliers sont présentés: cylindre à coefficient de Poisson constant, cylindre homogène et cylindre à deux couches minces. En qualité d'un exemple d'application on présente les résultats de la détermination des contraintes résiduelles dans le revêtement de fer galvanique d'un cylindre de cuivre à parois minces.

1. Introduction

La méthode connue d'alésage et de tournage selon Sachs pour la détermination des contraintes résiduelles dans les cylindres est développée conformément au cas d'un cylindre non-homogène dans les articles [1; 2; 3]. Les travaux [4; 5; 6] sont consacrés sur la détermination des contraintes résiduelles dans les cylindres non-homogenès d'après les déformations mesurées lorsqu'on dépose électrolytiquement le matériau.
Dans ce rapport on expose la théorie d'une méthode généralisée pour la détermination des contraintes résiduelles dans un cylindre creux non-homogène à partir des déformations mesurées sur la surface intérieure lorsqu'on applique (électrolytiquement, par exemple) le matériau sur la surface extérieure ou lorsqu'on enlève par un usinage quelconque le matériau de cette surface. La solution du problème est basée sur le remplacement d'un cylindre non-homogène par un cylindre homogène par morceaux et sur l'application suivante des formules de Lamé pour les couches homogènes.
Quelques cas particuliers sont présentés: cylindre à coefficient de Poisson constant, cylindre homogène et cylindre à deux couches minces. En qualité d'un exemple d'application on présente les résultats de la détermination des contraintes résiduelles dans le revêtement de fer galvanique d'un cylindre de cuivre à parois minces.

2. Théorie de la méthode

2.1 Cas général

Considérons un cylindre creux (fig. 1) dont le rayon intérieur r_o est une grandeur cons-

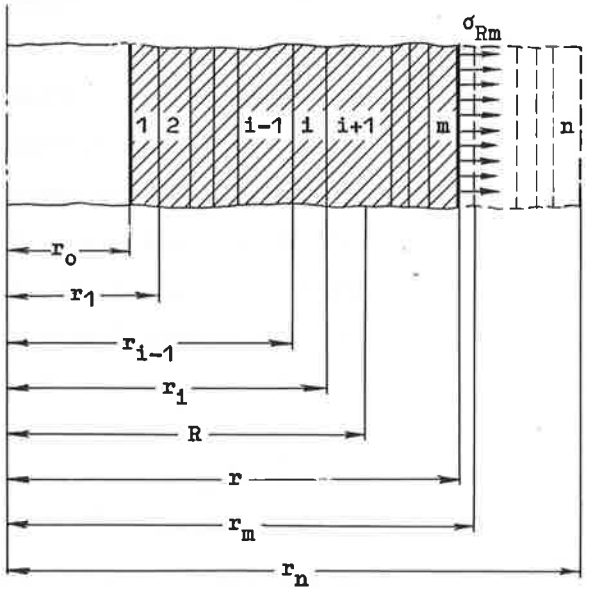

Fig. 1. Cylindre creux non-homogène à rayon extérieure variable: numération des couches, la désignation des rayons et les contraintes radiales σ_{Rm}. (Les couches appliqées sont marquées par les lignes discontinues)

tante, le rayon extérieur r est une grandeur variable (si l'on applique le matériau, r augmente, si l'on enlève, r diminue). La longueur du cylindre est supposée suffisamment grande pour que les effets d'extrémités soient négligeables dans le tronçon moyen. Mettons que l'état des contraintes résiduelles possède une propriété de la symétrie axiale et qu'il est invariable le long de l'axe du cylindre. Les dépendances du module d'élasticité et du coefficient de Poisson en fonction du rayon courant R supposons connues. Suivant le modèle d'un cylindre homogène par morceaux divisons le cylindre considéré en n couches dont chacune a un module d'élasticité et un coefficient de Poisson constant et égal aux grandeurs respectives pour le rayon moyen de la couche. Le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et le rayon extérieur de la i-ième couche désignons respectivement par E_i, μ_i et r_i.

Le problème est de déterminer les contraintes résiduelles radiales, circonférentielles et axiales dans les couches du cylindre d'après les déformations circonférentielle et axiale mesurées sur la surface intérieure du cylindre en fonction du rayon extérieur variable r.

L'augmentation de la m-ième couche du rayon r au rayon r_m sera équivalente à l'application à la surface du rayon r des contraintes radiales σ_{Rm} que nous supposerons positives. La charge σ_{Rm} entraîne dans la i-ième couche les contraintes supplémentaires radiales $\bar{\sigma}_{Ri}$, circonférentielles $\bar{\sigma}_{Ti}$ et axiales $\bar{\sigma}_{Li}$. La résolution connue d'un problème de Lamé pour un cylindre creux homogène soumis à des pressions intérieure et extérieure [7] permet d'écrire:

$$\left.\begin{matrix}\bar{\sigma}_{Ri}\\ \bar{\sigma}_{Ti}\end{matrix}\right\} = 2^{-1}E_1^*\left[f_i(r)\mp r_o^2R^{-2}g_i(r)\right] \qquad (1)$$

où $f_i(r)$ et $g_i(r)$ sont les fonctions sans dimensions passibles de la détermination à partir de l'information expérimentale. Dans les expressions (1) et par la suite on utilise la désignation:

$$E_i^*=E_i(1-\mu_i^2)^{-1} \quad (i=1, 2,\ldots,n).$$

En tenant compte des formules (1) nous établissons à l'aide de la loi de Hooke généralisée les relations suivantes entre les déformations et contraintes de la i-ième couche:

$$\bar{\varepsilon}_{Ti}=2^{-1}E_1^*E_i^{-1}(1+\mu_i)\left[(1-2\mu_i)f_i(r)+ +r_o^2R^{-2}g_i(r)\right]-\mu_i\bar{\varepsilon}_L(r); \qquad (2)$$

$$\bar{\sigma}_{Li}=E_1^*\mu_i f_i(r)+E_i\bar{\varepsilon}_L(r). \qquad (3)$$

Avec cela l'accroissement de la déformation axiale $\bar{\varepsilon}_L(r)=\varepsilon_L(r_m)-\varepsilon_L(r)$ est conformément à l'hypothèse des sections plates une grandeur indépendante du rayon courant R, c'est-à-dire on peut le déterminer directement d'après les données expérimentales. L'accroissement de la déformation circonférentielle $\bar{\varepsilon}_{Ti}$ est une fonction continue du rayon R. Sur la surface intérieure ($R=r_o$) il est égal à l'accroissement de la déformation circonférentielle mesurée $\bar{\varepsilon}_T(r)= =\varepsilon_T(r_m)-\varepsilon_T(r)$.

Les conditions $\bar{\sigma}_{R1}=0$, $\bar{\varepsilon}_{T1}=\bar{\varepsilon}_T(r)$ pour $R=r_o$ permettent d'établir les fonctions $f_1(r)$ et $g_1(r)$:

$$f_1(r)=g_1(r)=\bar{\varepsilon}_T(r)+\mu_1\bar{\varepsilon}_L(r). \qquad (4)$$

On peut déterminer les fonctions $f_i(r)$ et $g_i(r)$ pour les autres couches à partir des conditions de continuité des contraintes radiales $\bar{\sigma}_{Ri-1}=\bar{\sigma}_{Ri}$ et des déformations circonférentielles $\bar{\varepsilon}_{Ti-1}=\bar{\varepsilon}_{Ti}$ pour $R=r_{i-1}$. On obtient finalement les formules de récurrence:

$$f_i(r)=\left[2(1-\mu_i)\right]^{-1}\left\{\left[1+(1-2\mu_{i-1})(1+\mu_{i-1})(1+ +\mu_i)^{-1}E_iE_{i-1}^{-1}\right]f_{i-1}(r)-r_o^2r_{i-1}^{-2}\left[1- -(1+\mu_{i-1})(1+\mu_i)^{-1}E_iE_{i-1}^{-1}\right]g_{i-1}(r)\right\}+ +(\mu_i-\mu_{i-1})E_i^*(E_1^*)^{-1}\bar{\varepsilon}_L(r), \qquad (5)$$

$$g_i(r)=\left[2(1-\mu_i)\right]^{-1}\left\{r_{i-1}^2r_o^{-2}\left[(1-2\mu_{i-1})(1+ +\mu_{i-1})(1+\mu_i)^{-1}E_iE_{i-1}^{-1}-1+2\mu_i\right]f_{i-1}(r)+\left[1- -2\mu_i+(1+\mu_{i-1})(1+\mu_i)^{-1}E_iE_{i-1}^{-1}\right]g_{i-1}(r)\right\}+ +(\mu_i-\mu_{i-1})E_i^*(E_1^*)^{-1}r_{i-1}^2r_o^{-2}\bar{\varepsilon}_L(r). \qquad (5)$$

La condition $\bar{\sigma}_{Rm}=\sigma_{Rm}$ pour $R=r$ et la première expression du système (1) permettent d'établir la formule pour la contrainte radiale:

$$\sigma_{Rm}=2^{-1}E_1^*\left[f_m(r)-r_o^2r^{-2}g_m(r)\right]. \qquad (6)$$

Pour déterminer la contrainte circonférentielle utilisons l'équation d'équilibre:

$$\sigma_{Tm}=(r\sigma_{Rm})'.$$

Dans cette équation et par la suivante le symbole ' (prime) signifie la dérivée de la fonction par rapport à l'argument.
Après avoir substitué σ_{Rm} d'après (6) on établit de la dernière équation la formule pour la contrainte circonférentielle:

$$\sigma_{Tm}=2^{-1}E_1^*\{r[f_m'(r)-r_o^2r^{-2}g_m'(r)]+ +f_m(r)+r_o^2r^{-2}g_m(r)\}. \quad (7)$$

La condition de l'absence de force axiale à la section droite s'écrit:

$$\sum_{i=1}^{m-1}(r_i^2-r_{i-1}^2)\bar{\sigma}_{Li}+(r^2-r_{m-1}^2)\bar{\sigma}_{Lm}+2\int_r^{r_m}\sigma_{Lm}RdR=0. \quad (8)$$

En substituant les contraintes $\bar{\sigma}_{Li}$ et $\bar{\sigma}_{Lm}$ d'après (3) et dérivant ensuite par rapport à r nous établissons de l'équation (8) la formule pour la contrainte axiale:

$$\sigma_{Lm}=2^{-1}E_1^*r^{-1}\{(E_1^*)^{-1}[\sum_{i=1}^{m-1}E_i(r_i^2-r_{i-1}^2)+E_m(r^2-r_{m-1}^2)]\bar{\varepsilon}_L'(r)+\sum_{i=1}^{m-1}\mu_i(r_i^2-r_{i-1}^2)f_i'(r)+\mu_m(r^2-r_{m-1}^2)f_m'(r)+2r[E_m(E_1^*)^{-1}\bar{\varepsilon}_L(r)+\mu_m f_m(r)]\}. \quad (9)$$

Les formules déduites permettent de calculer les contraintes résiduelles dans les couches du cylindre. Les calculs doivent être exécutés dans l'ordre suivant:

1. À partir des données expérimentales on calcule d'après les formules (5) sucsessivement les fonctions $f_i(r)$ et $g_i(r)$ pour la chaque couche.
2. On trouve à l'aide des formules (6), (7) et (9) les contraintes σ_{Rm}, σ_{Tm} et σ_{Lm}.
3. On calcule les contraintes résiduelles supplémentaires engendrées dans la m-ième couche pendant l'application des couches m+1, m+2, ..., n d'après les formules (1) et (3).
4. En ajoutant les contraintes supplémentaires aux contraintes σ_{Rm}, σ_{Tm} et σ_{Lm} on calcule les contraintes résiduelles sommaires dans la m-ième couche.

Notons que l'influence des erreurs accidentelles des données expérimentales sur leur dérivées est très marguée. C'est pourquoi il faut en réalisant l'algorithme proposé utiliser les procédés du calcul et de la dérivation d'une fonction de nature expérimentale [8] ou exprimer les déformations mesurées par les formules empiriques dont les paramètres on détermine des conditions de la meilleure approximation.
Vu que les calculs décrites sont assez encombrants il est désirable de les effectuer en utilisant une calculatrice électronique.

2.2 Cylindre à coefficient de Poisson constant

Dans ce cas $\mu_i=\mu_1$ et les expressions (5) s'écrivent:

$$f_i(r)=a_i\theta(r), \quad g_i(r)=b_i\theta(r) \quad (10)$$

avec $\theta(r)=\bar{\varepsilon}_T(r)+\mu_1\bar{\varepsilon}_L(r)$.
On détermine les coefficients sans dimensionels a_i et b_i des relations (10) par les formules de récurrence:

$$a_i=[2(1-\mu_1)]^{-1}\{[1+(1-2\mu_1)E_iE_{i-1}^{-1}]a_{i-1}-(1-E_iE_{i-1}^{-1})r_o^2r_{i-1}^{-2}b_{i-1}\}, \quad (11)$$

$$b_i=[2(1-\mu_1)]^{-1}[(1-2\mu_1)(E_iE_{i-1}^{-1}-1)r_{i-1}^2r_o^{-2}a_{i-1}+(1-2\mu_1+E_iE_{i-1}^{-1})b_{i-1}].$$

2.3 Cylindre homogène

Cette fois, le problème se ramène à la considération de la première couche d'une seule. En posant m=1 dans les formules (6), (7) et (9), on trouve:

$$\sigma_{R1}=2^{-1}E_1^*(r^2-r_o^2)r^{-2}\theta(r),$$

$$\sigma_{T1}=2^{-1}E_1^*[(r^2-r_o^2)r^{-1}\theta'(r)+(r^2+r_o^2)r^{-2}\theta(r)],$$

$$\sigma_{L1}=E_1^*[2^{-1}(r^2-r_o^2)r^{-1}\Lambda'(r)+\Lambda(r)] \quad (12)$$

avec $\Lambda(r)=\bar{\varepsilon}_L(r)+\mu_1\bar{\varepsilon}_T(r)$.

En prenant $\bar{\varepsilon}_T(r)=-\varepsilon_T(r)$ et $\bar{\varepsilon}_L(r)=-\varepsilon_L(r)$ et en faisant des transformations simples on peut établir des expressions (12) les formules de Sachs pour le cas de tournage [9].

2.4 Cylindre à deux couches minces

Le cas fréquemment rencontré est un cylindre non-homogène à parois minces. Il est commode, par exemple, de déterminer les contraintes résiduelles dans des revêtements différents d'après les déformations mesurées pendant l'application du revêtement étudié sur la surface latérale d'un cylindre à parois minces [6; 10].

Dans le cas considéré on peut visiblement simplifier les calculs. Montrons cela sur l'exemple d'un cylindre à deux couches minces d'épaisseurs h_1 et h_2.
On peut les rayons r_o et r exprimer sous la forme: $r_o=r_1-h_1$, $r=r_1+h$ h étant la distance de l'interface. En négligeant les grandeurs $h_1 r_1^{-1}$ et hr_1^{-1} par rapport à l'unité, nous établissons des expressions générales (6), (7), (9) les formules approximatives suivantes:

$$\sigma_{R2} \approx E_2^* r_1^{-1}\left[(ph_1+h)\bar{\varepsilon}_T(h)+\mu_2(qh_1+h)\bar{\varepsilon}_L(h)\right],$$

$$\sigma_{T2} \approx E_2^*\left[(ph_1+h)\bar{\varepsilon}_T'(h)+\mu_2(qh_1+h)\bar{\varepsilon}_L'(h)+\right.$$
$$\left.+\bar{\varepsilon}_T(h)+\mu_2\bar{\varepsilon}_L(h)\right], \qquad (13)$$

$$\sigma_{L2} \approx E_2^*\left[(ph_1+h)\bar{\varepsilon}_L'(h)+\mu_2(qh_1+h)\bar{\varepsilon}_T'(h)+\right.$$
$$\left.+\bar{\varepsilon}_L(h)+\mu_2\bar{\varepsilon}_T(h)\right]$$

avec $p=E_1^*(E_2^*)^{-1}$, $q=p\mu_1\mu_2^{-1}$, $\bar{\varepsilon}_T(h)=\varepsilon_T(h_2)-\varepsilon_T(h)$, $\bar{\varepsilon}_L(h)=\varepsilon_L(h_2)-\varepsilon_L(h)$.
Dans le cas particulier ou $\bar{\varepsilon}_T(h)=\bar{\varepsilon}_L(h)=\bar{\varepsilon}(h)$ les formules (13) se simplifient et peuvent s'écrire sous la forme:

$$\sigma_{R2} \approx E_2^{\vee} r_1^{-1}(kh_1+h)\bar{\varepsilon}(h); \qquad (14)$$

$$\sigma_{T2} \approx \sigma_{L2} \approx E_2^{\vee}\left[(kh_1+h)\,\bar{\varepsilon}'(h)+\bar{\varepsilon}(h)\right] \qquad (15)$$

avec $E_2^{\vee}=E_2(1-\mu_2)^{-1}$, $k=E_1E_2^{-1}(1-\mu_1)^{-1}(1-\mu_2)$.

3. Exemple d'application

La méthode exposée a été appliquée à la détermination des contraintes résiduelles dans le revêtement de fer galvanique déposé sur la surface extérieure d'un cylindre de cuivre à parois minces de rayon r_1=16,48 mm, d'épaisseur h_1=1,47 mm et de longeur 130 mm. Le revêtement d'épaisseur h_2=0,31 mm est obtenu en bain électrolytique de la composition suivante ($g\cdot dm^{-3}$): $FeCl_2\cdot 4H_2O$...500, NaCl...100, $MnCl_2\cdot 4H_2O$...5, HCl...0,9. La température du bain étant +92,5 °C, la densité de courant cathodique 15 $A\cdot dm^{-2}$.
Les déformations sont mesurées à l'aide de jauges résistantes collées sur la surface intérieure du cylindre. D'après les résultats de la mesure on peut conclure que les déformations circonférentielles et axiales sont pratiquement égales. Ce fait permet d'approximer les données expérimentales par la seule parabole empirique:

$$\varepsilon = -10^{-7}(7223h-5161h^2) \qquad (16)$$

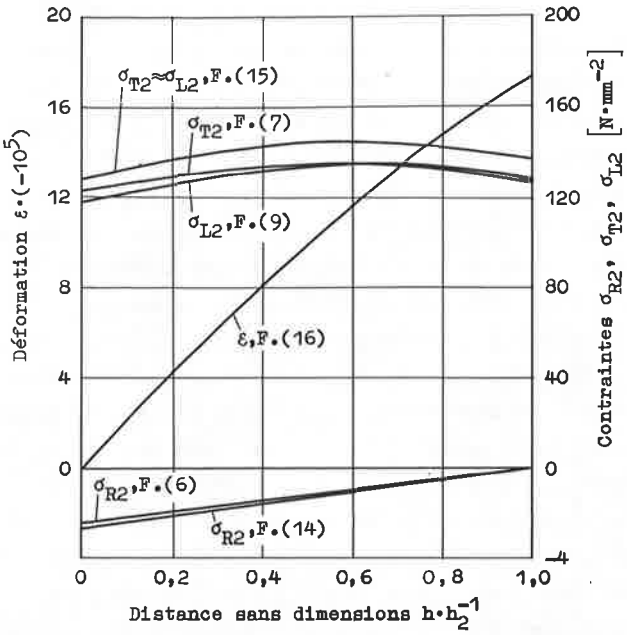

Fig. 2. Revêtement de fer galvanique déposé sur la surface extérieure d'un cylindre de cuivre à parois minces: courbe de déformation et les variations des contraintes résiduelles calculées d'après les formules (F.) établies

où la distance h est exprimée en millimètres. Le graphique de la fonction (16) est présentée sur la figure 2.
Les paramètres de l'expression (16) sont calculés à l'aide la calculatrice électronique Nairi-2 en utilisant le programme standard SARE basé sur la méthode des moindres carrées.
Les contraintes résiduelles sont calculées à partir de la déformation (16) et des paramètres d'élasticité suivantes: $E_1=1{,}10\cdot 10^5$ $N\cdot mm^{-2}$, $\mu_1=0{,}34$, $E_2=2{,}14\cdot 10^5$ $N\cdot mm^{-2}$, $\mu_2=0{,}29$. La figure 2 montre les variations des contraintes résiduelles dans le revêtement calculées d'après les formules exactes (6), (7), (9) et à partir des formules approchées (14) et (15). On peut constater que la formule approchée (15) donne les résultats augmentés de 4-9%. De même on peut voir que les contraintes radiales dans un cylindre à parois minces sont négligeables devant les contraintes circonférentielles et axiales.

4. Conclusion

On expose habituellement la théorie des méthodes mécaniques séparément pour le cas de l'enlèvement du matériau [1; 2; 3; 5] et pour le cas lorsqu'on applique le matériau [4; 5; 6]. La méthode proposée dans ce rap-

port est une généralisation de ces cas. Elle est reposée sur un modèle de cylindre homogène par morceaux et permet, à ce qu'il paraît, de mieux prendre en compte la réalité physique du matériau non-homogène par rapport au travail [1] fondé sur l'hypothèse de l'équivalence de la distribution des déformations dans un cylindre non-homogène à celle-ci dans un cylindre homogène.
Le calcul à l'aide des formules données dans les travaux [3; 4; 6] se ramène à la résolution d'un système d'équations trinômes. Dans la méthode présentée ici on remplace ce procédé par les calculs plus simples d'après les formules de récurrence.
Souvent on calcule les contraintes résiduelles dans les cylindres à parois minces en utilisant les formules compliquées des cylindres à parois epaisses [3; 5; 6]. Les formules données dans l'éxposé présente conformément aux cylindres à parois minces permettent considérablement de simplifier les calculs.

Références

[1] Krägeloh, E.: Bestimmung von Eigenspannungen an Zylindern aus inhomogenem Werkstoff mittels Ausbohr- und Abdrehverfahrens. Materialprüf. 1 (1959) Nr. 11/12 S. 377.

[2] Ivanov, S.I., V.N. Glazyrin: Détermination des contraintes résiduelles dans un cylindre multicouche. Tr. Kuibyshevsk. aviats. in-ta 53 (1971) p. 74 (en russe).

[3] Doi, O., T. Ukai, A. Ohtsuki: Measurement of Residual Stresses in Multi-Layer Electrodeposit Cylinders. Trans. JSME 40 (1974) No. 329, p. 132 (in Japanese).

[4] Kõo, J.P.: Calcul des contraintes propres dans les cylindres ronds à revêtements galvaniques. Zap. Leningr. Sel'skokhoz. in-ta 82 (1961) p. 179 (en russe).

[5] Dekhtyar, L.I.: Détermination des contraintes résiduelles dans les revêtements et dans les bimétaux. Kichinev: Izdatel'stvo "Kartya Moldovenyaskeh" 1968. (en russe).

[6] Doi, O., T. Ukai, A. Ohtsuki: Measurements of Electrodeposition Stress in a Cylinder. Trans. JSME 40 (1974) No. 331 p. 617 (in Japanese).

[7] Timoshenko, S.P., J.N. Goodier: Theory of Elasticity. New York: Mc. Graw-Hill Book Company 1970.

[8] Lanczos, C.: Applied Analysis. New York: Prentice Hall, Inc. 1956.

[9] Peiter, A.: Eigenspannungen I. Art, Ermittlung und Bewertung. Düsseldorf: Michael Triltsch Verlag 1966.

[10] Kõo, J.P.: Détermination des contraintes propres dans les revêtements galvaniques d'après la déformation d'une cathode en forme de tube à parois minces. Sb. nauch. tr. Ehst. Sel'skokhoz. akad. 31 (1963) p. 186 (en russe).