МИНИСТЕРСТВО
ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

ИЗВЕСТИЯ

ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

МАШИНОСТРОЕНИЕ

№ 8

1979

ИЗДАНИЕ МВТУ им. Н. Э. БАУМАНА

539.319 : 53.082.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОКРЫТИЯХ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ЗАМЕРА КРИВИЗНЫ

Канд. техн. наук, доц. Я. П. КЫО

Рассматривается определение остаточных напряжений в неоднородных покрытиях жестко защемленных пластин по кривизне, замеренной при освобождении контура пластины. Задача решается в рамках прикладной теории изгиба пластин путем сведения к интегральному уравнению Вольтерра первого рода и решения его способом приведения к дифференциальному уравнению. Для уменьшения влияния случайных ошибок предлагается данные измерения кривизны аппроксимировать аналитической формулой. Приводится иллюстративный пример.

Использование полиметаллических слоистых покрытий в современном машиностроении приводит к необходимости разработки теории экспериментальных методов исследования остаточных напряжений в покрытиях пластин [1, 2] с учетом переменности параметров упругости по толщине.

Пусть имеется серия одинаковых пластин толщиной h_1. Контур пластин произвольной формы и жестко (неподвижно) защемлен по всей длине. На одну сторону пластин наращивают исследуемое покрытие до заданных толщин. Необходимо, используя измеренные при освобождении краев пластин значения кривизны, найти остаточные напряжения в покрытии.

Допустим, что остаточные напряжения переменны только по толщине покрытия, причем напряжения в плоскости пластины одинаковы во всех направлениях.

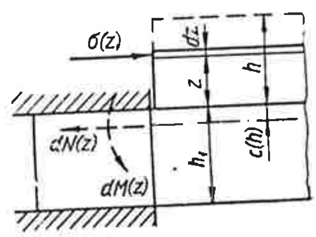

Рис. 1.

При наращивании элементарного слоя покрытия на расстоянии z от верхнего основания пластины в нем, а также на контуре покрытия появляются остаточные напряжения $\sigma(z)$, которые будем считать положительными (растягивающими). На самом же деле контур покрытия должен быть свободен от напряжений. Для реализации этого необходимо к контуру приложить отрицательные (сжимающие) напряжения $\sigma(z)$ (рис. 1). Равнодействующая этих напряжений $\sigma(z)dz$ и ее момент относительно нейтральной плоскости изгиба при толщине покрытия h уравновешиваются отнесенными к единице длины контура пластинки элементарными реактивными силами $dN(z)$ и моментами $dM(z)$.

В момент, когда покрытие имеет толщину h, на контуре пластины действуют реактивные силы и моменты

$$N(h) = \int_0^h \sigma(z)\, dz, \qquad M(h) = \int_0^h \sigma(z)\,[c(h) + z]\, dz,$$

где $c(h)$ — расстояние нейтральной плоскости изгиба от плоскости сопряжения пластины и покрытия.

Освобождение контура пластины эквивалентно приложению реактивных сил и моментов обратного направления. Таким образом, приходим к задаче о сжатии пластины с покрытием силами $N(h)$ и об изгибе моментами $M(h)$, которую решаем с привлечением известных допущений технической теории упругих изотропных пластин с малыми прогибами [3]. Пренебрегая влиянием сил $N(h)$ на изгиб и считая справедливым закон Гука, получим следующую зависимость между напряжением $\sigma(h)$ и замеряемой кривизной $\varkappa(h)$:

$$\int\limits_0^h \sigma(z)\,[c(h)+z]\,dz = D(h)\,\varkappa(h). \qquad (1)$$

Здесь расстояние $c(h)$ и изгибная жесткость $D(h)$ определяются выражениями

$$c(h) = -\int\limits_{-h_1}^{h} \overline{E}(z)\,z\,dz \left[\int\limits_{-h_1}^{h} \overline{E}(z)\,dz\right]^{-1};$$

$$D(h) = \int\limits_{-h_1}^{h} \overline{E}(z)\,[c(h)+z]^2\,dz,$$

где $\overline{E}(z) = E(z)\,[1-\mu(z)]^{-1}$, причем $E(z)$ — модуль упругости; $\mu(z)$ — коэффициент Пуассона.

В соотношении (1) и далее кривизна считается положительной, если пластина изгибается вогнутостью в сторону покрытия. Зависимость (1) представляет собой интегральное уравнение Вольтерра первого рода относительно искомой функции $\sigma(h)$. Аналитическое решение его, полученное путем сведения к дифференциальному уравнению, имеет вид

$$\sigma(h) = \exp\left[-\int\limits_0^h P(z)\,dz\right]\left\{\int\limits_0^h Q_1(z)\left[\exp\int\limits_0^z P(z)\,dz\right]dz + \sigma(0)\right\}, \qquad (2)$$

где напряжение $\sigma(0)$ у поверхности пластины ($h=0$) определяется выражением (штрих означает в дальнейшем дифференцирование по аргументу)

$$\sigma(0) = D(0)\,c^{-1}(0)\,\varkappa'(0), \qquad (3)$$

а функции $P(z)$ и $Q(z)$ имеют вид

$$P(z) = [1+2c'(z)]\,[z+c(z)]^{-1} - c''(z)\,[c'(z)]^{-1},$$

$$Q(z) = [D''(z)\,c'(z) - D'(z)\,c''(z)]\,\{c'(z)\,[z+c(z)]\}^{-1}\,\varkappa(z) + \\ + [2D'(z)\,c'(z) - D(z)\,c''(z)]\,\{c'(z)\,[z+c(z)]\}^{-1}\,\varkappa'(z) + \\ + D(z)\,[z+c(z)]^{-1}\,\varkappa''(z).$$

Для численного решения уравнения (1) можно применять метод конечных сумм. Используя при этом одну из квадратурных формул Ньютона—Котеса, вместо (1) получаем систему алгебраических уравнений, откуда рекуррентно определяем значения остаточного напряжения во всех узлах квадратурной формулы, кроме $h=0$, где напряжение вычисляем по (3).

Рассмотрим часто встречающийся в практике частный случай, когда модули упругости E_i и коэффициенты Пуассона μ_i материалов пластины ($i=1$) и покрытия ($i=2$) постоянны. Введя безразмерные переменные $\zeta = zh_1^{-1}$ и $\eta = hh_1^{-1}$, из (2) получим

$$\sigma(\eta) = \overline{E}_2 h_1 6^{-1} \{ \varphi(\eta) [\nu \upsilon(\eta)]^{-1} \varkappa'(\eta) + 4\omega(\eta) \upsilon^{-1}(\eta) \varkappa(\eta) + + 2 \int_0^{\eta} \varphi(\zeta) \upsilon^{-2}(\zeta) \varkappa(\zeta) d\zeta \Big\}, \tag{4}$$

где
$$\varphi(\eta) = 1 + 4\nu\eta + 6\nu\eta^2 + 4\nu\eta^3 + \nu^2\eta^4,$$
$$\omega(\eta) = 1 + 3\eta + 3\eta^2 + \nu\eta^3, \qquad \upsilon(\eta) = 1 + 2\eta + \nu\eta^2,$$
$$\nu = \overline{E}_2 \overline{E}_1^{-1}, \qquad \overline{E}_i = E_i (1 - \mu_i)^{-1} \qquad (i = 1, 2).$$

В случае одинаковых постоянных упругости пластины и покрытия вычисление остаточных напряжений несколько упрощается, так как при $\nu = 1$ в (4)

$$\varphi(\eta) \upsilon^{-1}(\eta) = (1 + \eta)^2, \qquad \omega(\eta) \upsilon^{-1}(\eta) = 1 + \eta, \qquad \varphi(\zeta) \upsilon^{-2}(\zeta) = 1.$$

При вычислениях по (2), (3) и (4), а также при численном решении уравнения (1) следует учитывать, что экспериментальные значения кривизны являются приближенными и содержат случайные ошибки. Поэтому непосредственное применение способов численного анализа, основанных на интерполяционных формулах, не дает удовлетворительных результатов. Особенно сильно от точности определения кривизны зависят ее производные. Надежность результатов вычисления остаточных напряжений можно значительно повысить, если выразить кривизну аналитической формулой, параметры которой определяют так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать опытные значения.

В случае постоянных параметров упругости пластины и покрытия формулу для аппроксимации опытных значений кривизны для некоторых покрытий можно получить на основании предположения, что эпюра остаточного напряжения описывается дробнолинейным выражением [4]

$$\sigma(\eta) = \sigma(0)(1 + \nu\eta)(1 + \gamma\nu\eta)^{-1}, \tag{5}$$

где γ — безразмерный параметр.

При (5) из уравнения (1) имеем

$$\varkappa(\eta) = 6\sigma(0) [\overline{E}_1 h_1 \nu^2 \gamma^3 \varphi(\eta)]^{-1} \{ \gamma\nu [\gamma\nu - 2(1 - \gamma) + \nu(3\gamma - 2)\eta] \eta + + (1 - \gamma)[2 - \gamma\nu + \nu(2 + \gamma\nu\eta)\eta] \ln(1 + \gamma\nu\eta) \}. \tag{6}$$

Параметры $\sigma(0)$ и γ можно найти общим методом определения параметров эмпирических формул [5], причем численную реализацию задачи из-за значительного объема вычислений следует проводить на ЭЦВМ.

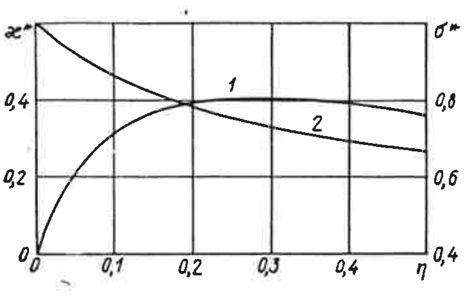

Рис. 2

В качестве иллюстративного примера на рис. 2 показаны зависимости безразмерной кривизны $\varkappa^*(\eta) = \varkappa(\eta) \overline{E}_1 h_1 \sigma^{-1}(0)$ (кривая *1*) и безразмерного напряжения $\sigma^*(\eta) = \sigma(\eta)\sigma^{-1}(0)$ (кривая *2*) от η, рассчитанные по (6) и (5) при $\gamma = \nu = 2$ для покрытия с относительной толщиной 0,5.

В заключение отметим, что полученные в данной работе зависимости сохраняют силу также и в случае, когда для определения остаточных напряжений наращенное на защемленную пластину покрытие снимается до заданных толщин и при освобождении контура пластины замеряется кривизна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поперека М. Я., Расчет спонтанных макронапряжений в наращиваемых пленках по деформации подложек и по возвращающим (или удерживающим) силовым факторам, Ученые записки Калининского государственного педагогического института. «Электроосажденные пленки», т. 79, Калинин, 1970.
2. Кыо Я. П., Еще раз о силовом и деформационном методах определения остаточных напряжений в покрытиях защемленных стержней и пластинок, Сборник научных трудов Эстонской сельскохозяйственной академии. № 67, Тарту, 1971.
3. Тимошенко С. П., Войновский—Кригер С., Пластинки и оболочки, Физматгиз, М., 1963.
4. Кыо Я. П., К определению остаточных напряжений в покрытиях, «Известия вузов. Машиностроение», 1976, № 1.
5. Демидович Б. П. и др., Численные методы анализа, изд-во «Наука» М., 1967.

Статья поступила 24 мая 1977 г.