# MATERIALPRÜFUNG
# MATERIALS TESTING
# MATÉRIAUX ESSAIS ET RECHERCHES

HERAUSGEBER: DEUTSCHER VERBAND FÜR MATERIALPRÜFUNG (DVM)
DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR ZERSTÖRUNGSFREIE PRÜFVERFAHREN (DGZfP)

Materialprüf. Bd. 17 Nr. 9 Seite 303 bis 342 Düsseldorf, September 1975

# Sur une méthode pour la détermination des contraintes résiduelles dans des sphères creuses

Par Y. Kyo

## Ein Verfahren zum Ermitteln von Eigenspannungen in Hohlkugeln

## On the method for determining residual stresses in hollow spheres

*Le calcul des contraintes résiduelles dans des sphères creuses homogènes d'après la déformation mesurée sur la surface intérieure lorsqu'on enlève le matériau de la surface extérieure était considéré par Peiter [1; 2]. On développe ici ce problème pour une sphère creuse dont les constantes d'élasticité dépendent du rayon. Avec cela les formules établies seront valables dans le cas lorsqu'on apporte (électrolytiquement, par exemple) le matériau sur la surface extérieure ainsi que dans le cas lorsqu'on enlève par un usinage quelconque le matériau de la surface extérieure.*

*Y. Kyo*, Candidat des sciences techniques, Académie agricole d'Estonie, Tartou/U.R.S.S.

C.D.U. 539.319:620.165.08-464
Reçu le 22 Avril 1975

Considérons une sphère creuse dont le rayon intérieur $r_0$ est une grandeur constante, le rayon extérieur $r$ est une grandeur variable (si l'on apporte le matériau, $r$ augmante, si l'on enlève, $r$ diminue). Supposons que l'état des contraintes résiduelles est symétrique sphérique, c'est-à-dire il est seulement la fonction du rayon. Les dépendances du module d'élasticité et du coefficient de Poisson en fonction du rayon courant $R$ supposons connues.

Divisons la sphère en $n$ couches dont chacune a un module d'élasticité et un coefficient de Poisson constants et égaux aux grandeurs respectives pour le rayon moyen de la couche. Le module d'élasticité, le coefficient de Poisson et le rayon extérieur de la $i$-ième couche désignons respectivement par $E_i$, $\mu_i$ et $r_i$.

Le problème est de déterminer des contraintes résiduelles radiales et circonférentielles dans les couches de la sphère d'après la déformation circonférentielle mesurée sur la surface intérieure de la sphère en fonction du rayon extérieur variable $r$.

L'augmentation de la $m$-ième couche du rayon $r$ au rayon $r_m$ sera équivalente à l'application à la surface du rayon $r$ des contraintes radiales $\sigma_{\mathrm{R}m}$ que nous supposerons positives *(Fig. 1)*.

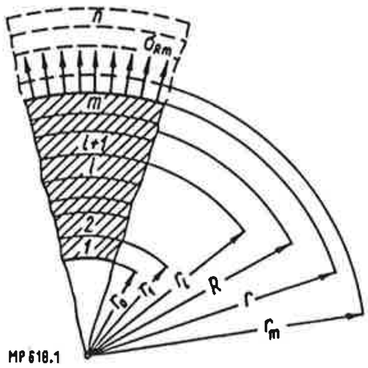


**Fig. 1: Dimensions, la numération des couches et les contraintes résiduelles radiales d'une sphère creuse**

Les couches de matériau apportées sont marquées par des lignes discontinues

La charge $\sigma_{\mathrm{R}m}$ entraîne dans la $i$-ième couche les contraintes supplémentaires radiales $\sigma_{\mathrm{R}i}^*$ et circonférentielles $\sigma_{\mathrm{T}i}^*$. La résolution connue d'un problème de la sphère creuse homogène soumise à des pressions intérieure et extérieure différentes [3] permet d'écrire:

$$\sigma_{\mathrm{R}i}^* = A_i(r) - \frac{B_i(r)}{R^3},$$
$$\sigma_{\mathrm{T}i}^* = A_i(r) + \frac{B_i(r)}{2R^3} \tag{1}$$

où $A_i(r)$ et $B_i(r)$ sont des fonctions du rayon extérieur variable $r$.

A cause de la symétrie sphérique les fonctions $A_i(r)$ et $B_i(r)$ s'écrivent:

$$A_i(r) = a_i\,\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r), \qquad B_i(r) = b_i\,\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r)$$

$a_i$ et $b_i$ étant des constantes de la $i$-ième couche, $\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r) = \varepsilon_{\mathrm{T}}(r_m) - \varepsilon_{\mathrm{T}}(r)$ l'accroissement de la déformation circonférentielle apparu sur la surface intérieure de la sphère pendant l'apport de la couche de l'épaisseur $r_m - r$.

Substituant les expressions obtenues pour $A_i(r)$ et $B_i(r)$ dans les Equs. (1) on obtient:

$$\sigma_{\mathrm{R}i}^* = \left(a_i - \frac{b_i}{R^3}\right)\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r),$$
$$\sigma_{\mathrm{T}i}^* = \left(a_i + \frac{b_i}{2R^3}\right)\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r). \tag{2}$$

Tenant compte des Equs. (2) nous établissons à l'aide de la loi de *Hooke* l'accroissement de la déformation circonférentielle dans la $i$-ième couche:

$$\varepsilon_{\mathrm{T}i}^* = \frac{1}{E_i}\left[(1-2\mu_i)\,a_i + (1+\mu_i)\frac{b_i}{2R^3}\right]\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r). \tag{3}$$

Les conditions $\varepsilon_{\mathrm{T}1}^* = \varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r)$, $\sigma_{\mathrm{R}1}^* = 0$ pour $R = r_0$ permettent d'établir les constantes $a_1$ et $b_1$:

$$a_1 = \frac{2}{3}\frac{E_1}{1-\mu_1}, \qquad b_1 = a_1 r_0^3. \tag{4}$$

On peut déterminer les autres constantes d'après les conditions de continuité des déformations circonférentielles et des contraintes radiales $\varepsilon_{\mathrm{T}i}^* = \varepsilon_{\mathrm{T}i+1}^*$, $\sigma_{\mathrm{R}i}^* = \sigma_{\mathrm{R}i+1}^*$ pour $R = r_i$. On en déduit:

$$a_{i+1} = \frac{1+\mu_{i+1}}{3(1-\mu_{i+1})}\left[\left(2\frac{1-2\mu_i}{1+\mu_{i+1}}\frac{E_{i+1}}{E_i} + 1\right)a_i + \left(\frac{1+\mu_i}{1+\mu_{i+1}}\frac{E_{i+1}}{E_i} - 1\right)\frac{b_i}{r_i^3}\right],$$
$$b_{i+1} = b_i + (a_{i+1} - a_i)\,r_i^3. \tag{5}$$

La condition $\sigma_{\mathrm{R}m}^* = \sigma_{\mathrm{R}m}$ pour $R = r$ et la première expression du système Equs. (2) permettent d'établir la formule pour la contrainte radiale:

$$\sigma_{\mathrm{R}m} = \left(a_m - \frac{b_m}{r^3}\right)\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r). \tag{6}$$

Pour déterminer la contrainte circonférentielle utilisons l'équation d'équilibre:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{R}m}}{\mathrm{d}r} + 2\frac{\sigma_{\mathrm{R}m} - \sigma_{\mathrm{T}m}}{r} = 0.$$

Après avoir substitué $\sigma_{\mathrm{R}m}$ d'après l'Equ. (6) on établit de la dernière équation la formule pour la contrainte circonférentielle:

$$\sigma_{\mathrm{T}m} = \frac{r}{2}\left(a_m - \frac{b_m}{r^3}\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r)}{\mathrm{d}r} + \left(a_m + \frac{b_m}{2r^3}\right)\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r). \tag{7}$$

Les formules déduites permettent de calculer les contraintes résiduelles dans les couches de la sphère. Les calculs doivent être exécutés dans l'ordre suivant. D'après les Equs. (4) et (5) on calcule successivement les constantes $a_i$, $b_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ensuite on trouve les contraintes $\sigma_{\mathrm{R}m}$, $\sigma_{\mathrm{T}m}$ par les Equs. (6), (7) et les contraintes résiduelles supplémentaires engendrées dans la $m$-ième couche pendant l'apport des couches $m+1, m+2, \ldots, n$ d'après les Equs. (2). Enfin, en ajoutant les contraintes supplémentaires aux contraintes $\sigma_{\mathrm{R}m}$ et $\sigma_{\mathrm{T}m}$ on calcule les contraintes résiduelles sommaires dans la $m$-ième couche.

Si pour déterminer des contraintes résiduelles on enlève le matériau de la surface extérieure de la sphère, il faudra supposer $\varepsilon_{\mathrm{T}}(r_m) = 0$, c'est-à-dire alors $\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r) = -\varepsilon_{\mathrm{T}}(r)$.

Dans le cas d'une sphère homogène les Equs. (6) et (7) se simplifient et peuvent s'écrire sous la forme:

$$\sigma_{\mathrm{R}} = \frac{2}{3}\frac{E}{1-\mu}\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r),$$
$$\sigma_{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}\frac{E}{1-\mu}\left[\left(r - \frac{r_0^3}{r^2}\right)\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r)}{\mathrm{d}r} + \left(2 + \frac{r_0^3}{r^3}\right)\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r)\right]. \tag{8}$$

Prenant $\varepsilon_{\mathrm{T}}^*(r) = -\varepsilon_{\mathrm{T}}(r)$ et faisant des transformations simples on peut établir des Equs. (8) les formules détuites par *Peiter* [1; 2].

Notons que l'authenticité des calculs proposés peut être considérablement augmentée, si l'on exprime les déformations mésurées par une formule empirique, dont les paramètres on détermine de la condition de la meilleure approximation.

Vu que les calculations décrites sont assez volumineuses il est désirable de les effectuer en utilisant une calculatrice électronique.

Quant aux particularités de l'expérience on peut les trouver dans les œuvres mentionnées de *Peiter*.

## Références


[1] *Peiter, A.*: Materialprüf. 9 (1967) No. 2 p. 56.

[2] –: Schweiz. Arch. angew. Wiss. und Techn. 34 (1968) No. 8 p. 257.

[3] • *Timoshenko, S., J. N. Goodier*: Theory of Elasticity. New York: Mc. Graw-Hill Book Company 1970.


MP 618