

О РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРОКРИСТАЛЛИЗАЦИОННЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ГАЛЬВАНИЧЕСКИХ ПОКРЫТИЯХ ПО ДЕФОРМАЦИИ ЛЕНТОЧНОГО КАТОДА

И. о. доцента, кандидат технических наук Я. П. Кыо
Кафедра строительной механики

В статье М. Я. Попереки [1] для определения электрокристаллизационных (действительных внутренних) напряжений в гальванических покрытиях по прогибу на конце консольно защемленного прямолинейного ленточного катода предлагается формула

$$\sigma = \frac{2[E_K(d^3/3 + dz^2 - d^2z) + E_n(t^3/3 + tz^2 + t^2z)]}{l^2(t+z)} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad (1)$$

Здесь E_K и E_n — модули упругости металлов катода и покрытия; d и l — толщина и длина катода; t — текущая толщина покрытия; y — прогиб на свободном конце катода; z — расстояние нейтральной линии от границы между катодом и покрытием, вычисляемое в виде суммы $z = z_1 + |z_2|$, где первое слагаемое

$$z_1 = \frac{E_K d^2 - E_n t^2}{2(E_K d + E_n t)} \quad (2)$$

определяет положение нейтральной линии при чистом изгибе, а второе слагаемое

$$|z_2| = \frac{d^3/3 + dz_1^2 - d^2z_1 + t^3/3 + tz_1^2 + t^2z_1}{(t+d)(t+z_1)} \quad (3)$$

учитывает смещение нейтральной линии от действия продольной силы.

С целью упростить расчеты по формулам (1) — (3) М. Я. Поперека предлагает при $t \leq d/3$ принимать $z = 2d/3$.

Для расчета электрокристаллизационных напряжений по углу закручивания цилиндрического винтового ленточного катода М. Я. Поперека дает формулы, которые можно получить из формул для прямолинейного ленточного катода, если в них величину dy/l^2 заменить на $d\varphi/4\pi Rn$, где φ , R , n — соответственно угол закручивания, радиус и число витков катода.

В работах М. Я. Попереки [2, 3] рекомендуется в формулы электрокристаллизационных напряжений ввести множитель $1/(1 - \mu_n)$ (μ_n — коэффициент Пуассона металла покрытия), учитывающий наличие плоского напряженного состояния.

Достоинство расчетного метода М. Я. Попереки перед ранее известными [4—7 и др.] состоит в том, что он свободен от предположения о постоянстве искомых напряжений в процессе наращивания. Однако этот метод требует уточнения.

Заметим прежде всего, что в методе М. Я. Попереки допущена неточность при определении смещения нейтральной линии от действия продольной силы. Чтобы убедиться в этом, составим уравнение нейтральной линии для катода с покрытием, находящегося в условиях чистого изгиба и сжатия (рис. 1), и определим величину $|z_2|$.

Используя формулу для напряжений в неоднородном стержне [8], получаем уравнение нейтральной линии

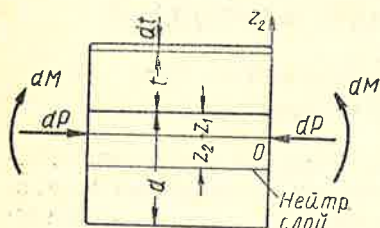


Рис. 1.

$$dP/B + z_2 dM/D = 0. \quad (4)$$

Здесь B и D — приведенные жесткости катода с покрытием при растяжении-сжатии и изгибе, определяемые выражениями

$$B = b(E_k d + E_n t),$$

$$D = b[E_k(d^3/3 + d z_1^2 - d^2 z_1) + E_n(t^3/3 + t z_1^2 + t^2 z_1)],$$

где b — ширина катода.

Из уравнения (4) после подстановки приращений силы $dP = \sigma b dt$ и момента $dM = \sigma b (z_1 + t) dt$ находим

$$|z_2| = i^2 / (z_1 + t), \quad (5)$$

где $i = \sqrt{D/B}$ — приведенный радиус инерции поперечного сечения катода с покрытием.

Если из выражения (5) исключить величину i , то получаем формулу

$$|z_2| = \frac{E_k(d^3/3 + d z_1^2 - d^2 z_1) + E_n(t^3/3 + t z_1^2 + t^2 z_1)}{(E_k d + E_n t)(z_1 + t)}, \quad (6)$$

которая не совпадает с выражением (3).

М. Я. Поперека определяет смещение $|z_2|$ по выражению (5), но вычисляет радиус инерции составного сечения по формуле $i = \sqrt{J/F}$, где J и F — момент инерции и площадь поперечного сечения катода с покрытием. Таким образом, М. Я. Поперека

отождествляет радиусы инерции поперечных сечений биметаллического и однородного стержней. По этой причине при неравных модулях упругости металлов катода и покрытия формула (3) оказывается недействительной.

Теперь, после уточнения величины $|z_2|$, расчет электрокристаллизационных напряжений по трем довольно громоздким формулам (1) — (3) можно свести к расчету по одной компактной формуле.

Определим расстояние z . Складывая величины z_1 и $|z_2|$ по формулам (2) и (6), после преобразований получаем

$$z = \frac{2d^3 + 3d^2 t - \vartheta t^3}{3(d^2 + 2dt + \vartheta t^2)}, \quad (7)$$

где $\vartheta = E_n/E_k$.

Попутно заметим, что предложение М. Я. Попереки — при $t \leq d/3$ принимать $z = 2d/3$, связано со значительной погрешностью. Так, например, при $\vartheta = 2$ ошибка достигает 29%, что можно установить при помощи формулы (7).

Подставляя значение z по выражению (7) в соотношение (1) и производя преобразования, для электрокристаллизационных напряжений получаем формулу

$$\sigma = \frac{E_k}{3l^2} \cdot \frac{\vartheta(d+t)^4 + (1-\vartheta)(d^4 - \vartheta t^4)}{(d+t)^2 - (1-\vartheta)t^2} \cdot \frac{dy}{dt}. \quad (8)$$

При вычислениях по этой формуле прогиб y считается положительным, если он направлен в сторону покрытия.

Отметим, что для получения формулы (8) нет надобности в определении величины $|z_2|$. Действительно, если в соотношение (1) подставить значение $z = z_1$ по выражению (2), то после преобразований снова придем к формуле (8). Это объясняется тем, что зависимость

$$dy = l^2 dM/2D,$$

на которой основана формула (1), справедлива также и в том случае, если приращение момента dM и приведенная жесткость D вычисляются относительно нейтральной линии при чистом изгибе.

Чтобы получить формулу для расчета электрокристаллизационных напряжений по углу закручивания цилиндрического винтового ленточного катода, заменим в выражении (8) величину dy/l^2 на $d\varphi/4\pi Rn$. Тогда найдем

$$\sigma = \frac{E_k}{12\pi Rn} \cdot \frac{\vartheta(d+t)^4 + (1-\vartheta)(d^4 - \vartheta t^4)}{(d+t)^2 - (1-\vartheta)t^2} \cdot \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9)$$

В этой формуле угол φ считается положительным, если при наращивании наружного покрытия катод раскручивается, а при наращивании внутреннего покрытия — закручивается.

Формулы (8) и (9) были получены для узкого ленточного катода, ширина которого значительно меньше его длины. Расчет электрорекристаллизационных напряжений по деформации широкого ленточного катода, ширина которого соизмерима с его длиной, требует специального исследования.

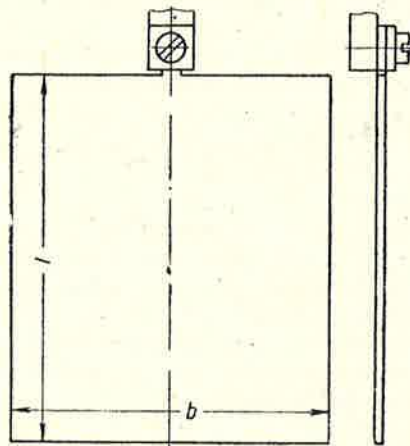


Рис. 2.

Для частного случая, когда катод представляет собой прямоугольную пластинку, заземленную на малом участке края (рис. 2), можно получить расчетную формулу, если в выражении (8) модули упругости E_k и E_n заменить соответственно величинами $E_k/(1 - \mu_k)$ (μ_k — коэффициент Пуассона металла катода) и $E_n/(1 - \mu_n)$. В итоге

$$\sigma = \frac{E_k}{3(1 - \mu_k)^2} \cdot \frac{\nu(d+t)^4 + (1 - \nu)(d^4 - \nu t^4)}{(d+t)^2 - (1 - \nu)t^2} \cdot \frac{dy}{dt}, \quad (10)$$

где

$$\nu = E_n(1 - \mu_k)/E_k(1 - \mu_n).$$

Более строгий вывод формулы (10) для пластинчатого катода произвольной формы приведен в работе [9]. Для частного случая, когда $\mu_k = \mu_n$, эту формулу можно получить на основании формул работ [6, 7].

Надо заметить, что предложение М. Я. Попереки, относящееся к учету плоского напряженного состояния, обосновано только для частного случая, когда $\mu_k = \mu_n$. В этом нетрудно убедиться путем сравнения формулы (10) с формулой, которая получается, если согласно предложению М. Я. Попереки в правую часть выражения (8) ввести множитель $1/(1 - \mu_n)$.

В частных случаях, когда постоянные упругости металлов катода и покрытия равны ($E_k = E_n = E$, $\mu_k = \mu_n = \mu$) или толщина покрытия пренебрежимо мала по сравнению с толщиной катода ($t \ll d$), формулы (8)–(10) значительно упрощаются и принимают вид, указанный в таблице.

Формула	Частный случай	
	$E_k = E_n = E$, $\mu_k = \mu_n = \mu$	$t \ll d$
(8)	$\sigma = \frac{E(d+t)^2}{3l^2} \cdot \frac{dy}{dt}$	$\sigma = \frac{E_k d^2}{3l^2} \cdot \frac{dy}{dt}$
(9)	$\sigma = \frac{E(d+t)^2}{12\pi Rn} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$	$\sigma = \frac{E_k d^2}{12\pi Rn} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$
(10)	$\sigma = \frac{E(d+t)^2}{3(1-\mu)l^2} \cdot \frac{dy}{dt}$	$\sigma = \frac{E_k d^2}{3(1-\mu_k)l^2} \cdot \frac{dy}{dt}$

В заключение отметим, что формулами (8)–(10), выведенными для случая наращивания, можно также пользоваться в случае, если прогиб или угол закручивания измеряются в процессе постепенного снятия металла покрытия элементарными слоями.

ЛИТЕРАТУРА

1. По перек а М. Я. Метод расчета действительных внутренних напряжений в гальванических покрытиях. Заводская лаборатория, 1964, т. 30, № 4.
2. По перек а М. Я. Об определении действительных внутренних напряжений, возникающих в металлах при электрокристаллизации. Уч. зап. Новосиб. гос. пед. ин-та, 1965, вып. 20.
3. По перек а М. Я. Внутренние напряжения электролитически осаждаемых металлов. Западно-Сиб. кн. изд-во, 1966.
4. Stoney G. The tension of metallic films deposited by electrolysis. Proc. Roy. Soc., 1909, v. A 82, p. 172.
5. Brenner A., Senderoff S. Calculation of stress in electrodeposits from the curvature of a plated strip. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1949, v. 42, No 2.
6. Кы о Я. П. Расчет собственных напряжений в гальванических покрытиях по деформации катодной пластинки. Сб. научн. тр. Эст. сельскохоз. акад., 1959, № 13.
7. Д а в и д е н к о в Н. Н. Об измерения остаточных напряжений в электролитических покрытиях. Физика твердого тела, 1960, т. 2, вып. 11.
8. Б и р г е р И. А. Неравномерно нагретые стержни с переменными параметрами упругости. В сб. «Расчеты на прочность. Вып. 7.» Машгиз, 1961.
9. Кы о Я. П. Определение собственных напряжений в деталях машин, восстановленных гальваническими покрытиями. Кандидатская диссертация. ЛСХИ, 1965.

ELEKTROKRISTALLISATSIOONIPINGETE ARVUTAMISEST LINTKATOODI DEFORMATSIOONI JÄRGI

Dotsendi kt., tehnikateaduste kandidaat J. Kõo

Ehitusmehaanika kateeder

Resümee

Artiklis täpsustatakse M. J. Popereka töödes [1...3] antud elektrokristallisatsioonipingete arvutamise meetodit. Seejuures käsitletakse arvutusi sirge lintkatoodi vaba otsa joonsiirde ja kruvijoonelise lintkatoodi väändenurga järgi.

ÜBER DIE BERECHNUNG VON ELEKTROKRISTALLI- SATIONSSPANNUNGEN NACH DER FORMÄNDERUNG EINER STREIFENKATHODE

J. Kõo

Zusammenfassung

Im Beitrag wird die in den Arbeiten von M. J. Popereka [1...3] gegebene Methode zur Berechnung der Elektrokristallisationsspannungen präzisiert. Dabei werden die Berechnungen nach der Verschiebung des Endpunktes einer geraden Streifenkathode und nach dem Verdrehungswinkel einer schraubenförmigen Streifenkathode behandelt.